Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 1 Combinatoriek

1 Definities

(a) De algemene formule voor het aantal permutaties k uit n is $\frac{n!}{(n-k)!}$. In ons geval hebben we $n = 8$ en $k = 3$. Invullen geeft dus $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

(b) $\binom{10}{6}$ en $\binom{10}{4}$.
Zeggen dat je 6 van de 10 stappen naar rechts gaat is hetzelfde als zeggen dat je 4 van de 10 stappen naar boven gaat.

2 Bestuur

(a) Dit is een ongeordende greep van 3 uit 10 zonder herhaling dus het aantal manieren is $\binom{10}{3} = 120$.

(b) Dit zijn twee ongeordende grepen zonder herhaling. Als eerste kiezen we 1 vrouw uit de 6 vrouwen, dat is gelijk aan $\binom{6}{1}$. Vervolgens kiezen we willekeurig nog 2 mensen uit de 4 mannen, dat is gelijk aan $\binom{4}{2}$. Het totale aantal manieren is dus gelijk aan $\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} = 36$.

3 Bank

(a) We hebben voor deze bank 8 plaatsen en we bekijken per plaats hoeveel opties we hebben. Stel dat we met een jongen beginnen, hiervoor hebben we 4 keuzes. Vervolgens moeten we een meisje kiezen, ook 4 keuzes. Daarna weer een jongen, 3 keuzes, dan weer een meisje, 3 keuzes etc. Het aantal manieren dat we de kinderen kunnen neerzetten is gelijk aan $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4! \cdot 4! = 576$. Omdat we ook met een meisje hadden kunnen beginnen moet je dit aantal vermenigvuldigen met 2: $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$.

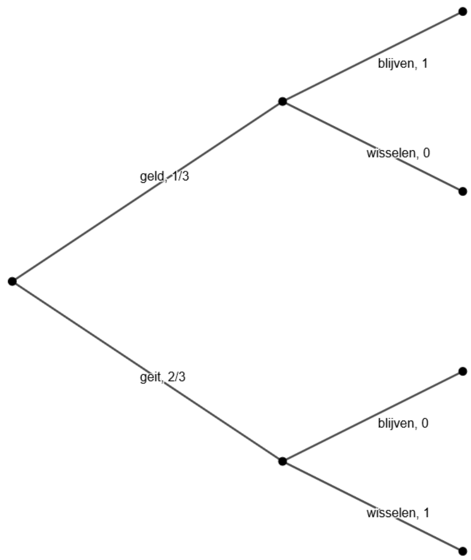
(b) Het aantal manieren waarop de meisjes naast elkaar kan zetten is 4!. Voor de overige plekken kun je de jongens ook weer op 4! manieren neerzetten. Het groepje van meisjes kun je op 5 verschillende manieren op de bank zetten. Je kunt het eerste meisje bijvoorbeeld op plek 1 zetten (de overige drie meisjes bezetten dan plek 2, 3 en 4) of bijvoorbeeld op plek 3 (de overige drie meisjes bezetten dan plek 4, 5 en 6). Beschouw het groepje meisjes nu als één indivudu, dan verandert het aantal plekken op de bank van acht naar vijf. Als eerste plaatsen we het groepje meisjes op één van de vijf plekken, dat kan op $\binom{5}{1}$ manieren.
Samen met het aantal manieren die we eerder berekent hebben is het totale aantal manieren in deze situatie gelijk aan $\binom{5}{1} \cdot 4! \cdot 4! = 2880$.

4 Drie deuren

(a) In de eerste ronde kunnen we kiezen uit 3 deuren waarbij achter één deur een zak geld ligt en achter de andere twee deuren een geit. De kans op een zak geld is dan 1/3 en de kans op een geit is 2/3.
In ronde twee is er door de spelshowleider een deur geopend waar een geit achter staat (dit is een andere deur dan jouw gekozen deur). Vervolgens krijgen we de mogelijkheid om te wisselen. Bekijk nu twee situaties:

- Achter de deur die je gekozen hebt in ronde 1 ligt een zak met geld. Als je bij je eigen deur blijft heb je kans 1 dat je de zak geld wint. Als je wisselt heb je kans 0 dat je een zak geld wint.
- Achter de deur die je gekozen hebt in ronde 1 staat een geit. Als je bij je eigen deur blijft heb je kans 0 dat je de zak geld wint. Als je wisselt heb je kans 1 dat je een zak geld wint.

Dit omgezet in een kansboom geeft:



(b) Je wilt de kans op een zak geld winnen berekenen, gegeven dat je van deur hebt gewisseld in ronde 2. Om dit te berekenen volg je de twee verschillende paden in je boom die bij deze kans horen en bereken je per pad wat de kans is. Dit geeft:
$P(\text{geld}\big|\text{wisselen in ronde 2}) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

5 Bioscoopbonnen

(a) Dit is een ongeordende greep van 4 uit 30 zonder herhaling dus het aantal manieren is gelijk aan $\binom{30}{4} = 27405$.

(b) Om de kans te berekenen dat één leerling uit de klas alle vier de bonnen krijgt wil je het aantal manieren waarop dit mogelijk is delen door het totaal aantal manieren. Het aantal manieren waarop één leerling alle bonnen krijgt is 30 (je hebt immers 30 leerlingen). Het totaal aantal manieren is een geordende greep met herhaling en dus gelijk aan 30^4. Nu kun je de kans als volgt berekenen:
$P(\text{één leerling krijgt alle bonnen}) = \frac{30}{30^4} = 0,000037$