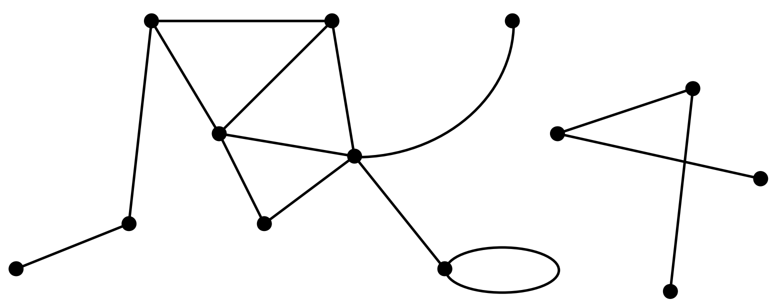
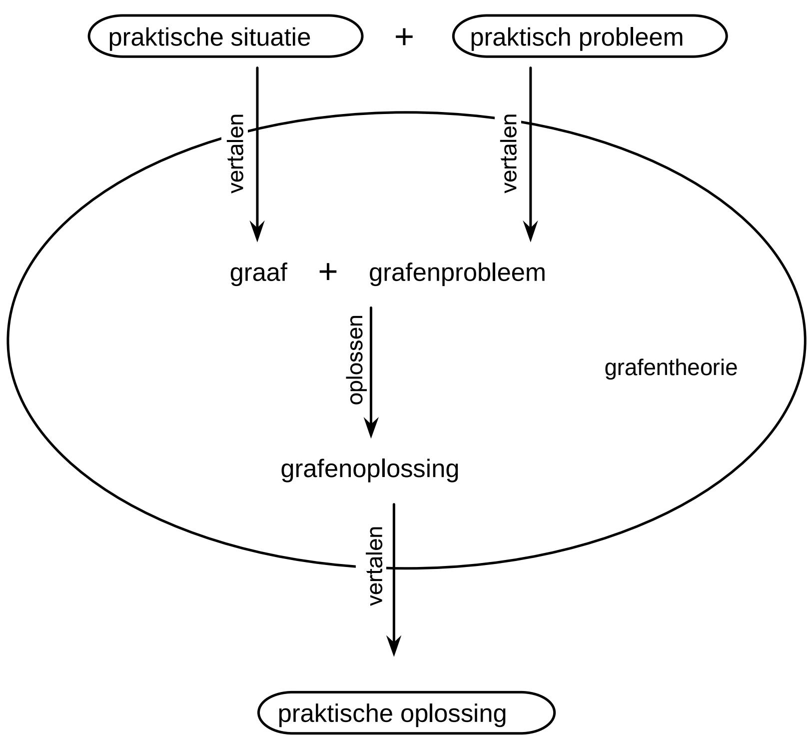
§A Inleiding

Grafentheorie is een tak van de Wiskunde die is ontwikkeld vanuit een aantal kleine probleempjes. Pas sinds het begin van de twintigste eeuw is er een grote interesse ontstaan voor deze theorie. Eén van de redenen voor de toegenomen belangstelling is ongetwijfeld het feit dat de Grafentheorie een aantal toepassingen kent in wel zeer uiteenlopende takken van de wetenschap zoals Scheikunde, Economie, Linguïstiek, Genetica en Operations Research.

Een *graaf* is eigenlijk niets anders dan een diagram, bestaande uit een aantal punten in het platte vlak die al dan niet verbonden zijn door lijnen. Hieronder zie je een voorbeeld van een graaf.



Allerlei sterk uiteenlopende situaties laten zich schematiseren tot grafen. Vragen die je je kunt stellen bij dergelijke situaties kunnen dan worden vertaald naar vragen over de bijbehorende grafen. Nadat zo'n grafenprobleem grafentechnisch is opgelost dient deze grafenoplossing tenslotte weer te worden terugvertaald naar de oorspronkelijke context. Dit proces ziet er schematisch als volgt uit:

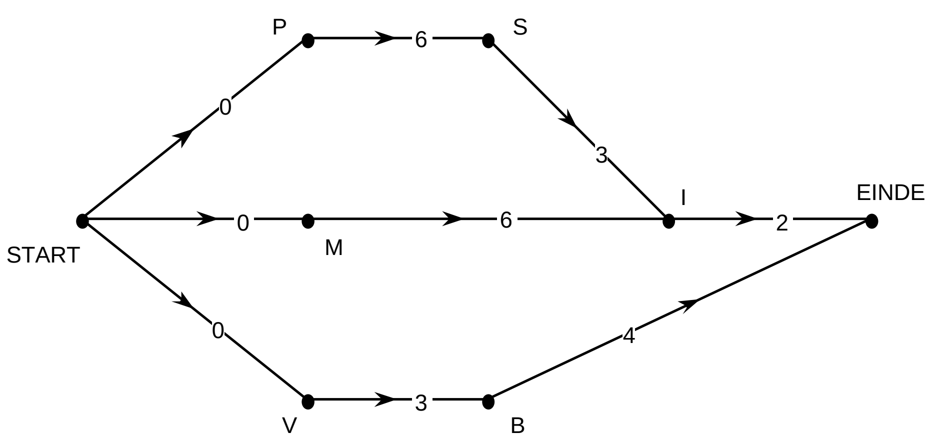


Om een beeld te krijgen van de wijze waarop een situatie kan worden vertaald naar een graaf en de praktische vraagstelling in grafentermen kan worden gevat, geven we nu enkele voorbeelden. We geven hierbij nog geen oplossingsstrategieën, die kom je vanzelf tegen in de komende paragrafen. Het gaat ons er in dit stadium alleen om dat je een beeld krijgt van de toepassingsgebieden van de grafentheorie.

Voorbeeld: Projectplanning
Bij het uitvoeren van een project kunnen vaak diverse deelactiviteiten (taken) worden onderscheiden. Sommige van deze activiteiten kunnen gelijktijdig plaatsvinden, maar het kan ook voorkomen dat een activiteit pas kan starten als een andere is voltooid. Als projectvoorbeeld nemen we het opnieuw inrichten van een appartement.

P	verlaagd Plafond aanbrengen in de woonkamer	(6 uur)
S	Schilderen van de muren van de woonkamer	(3 uur)
V	nieuwe Vloerbedekking leggen in de slaapkamer	(3 uur)
M	diverse Meubelstukken overschilderen	(6 uur)
B	Bed en linnenkast van de slaapkamer monteren	(4 uur)
I	meubels Installeren in de woonkamer	(2 uur)

We kunnen ons miniproject in grafenvorm gieten door taken van het project weer te geven als punten, en een gerichte lijn XY te trekken als taak X vooraf moet gaan aan taak Y. Tevens wordt een startpunt en eindpunt toegevoegd. De tijdsduur van taak X plaatsen we langs elke uitgaande lijn uit punt X. Zo ontstaat een *projectgraaf*. Omdat de lijnen gericht zijn spreekt men van een *gerichte graaf.*



Je kunt nu een aantal zaken vrij gemakkelijk aflezen uit deze projectgraaf.

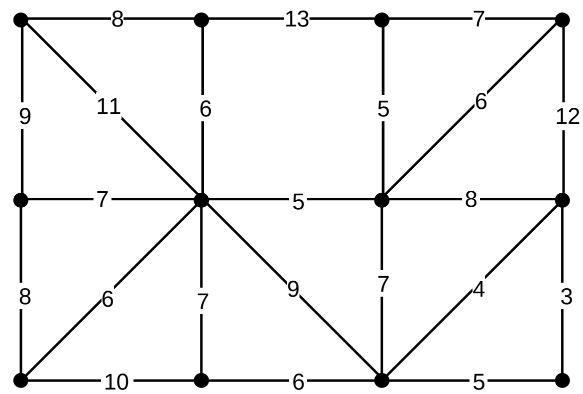
Oefening 1

a Hoeveel tijd kost het voltooien van het project minstens? (Je mag hierbij aannemen dat je met genoeg mensen bent om al het werk uit te voeren.)

b Hoeveel speling is er bij het leggen van de vloerbedekking zonder de minimale projectduur in gevaar te brengen?

Voorbeeld: Goedkoopste netwerk

In een groot bankgebouw wil men een buizensysteem aanleggen voor het verzenden van geldkokers tussen 12 verschillende locaties in het gebouw. De aanlegkosten (in duizenden euro's) voor de verschillende mogelijke verbindingen zijn in onderstaande graaf weergegeven.



Wat is het goedkoopste buizennet (elke locatie moet bereikbaar zijn vanuit elke andere locatie, maar omwegen zijn niet erg)? Er zijn verschillende strategieën om zo'n goedkoopste net te vinden.

Oefening 2

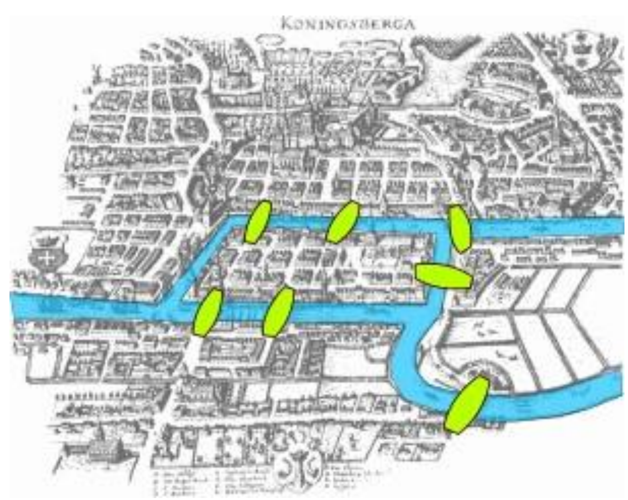
a Wat is het goedkoopste buizennet (elke locatie moet bereikbaar zijn vanuit elke andere locatie, maar omwegen zijn niet erg)?

b Welke strategie heb je bedacht? Probeer je strategie in de vorm van een algoritme (recept) te formuleren.

Voorbeeld: Rondwandeling door Königsberg

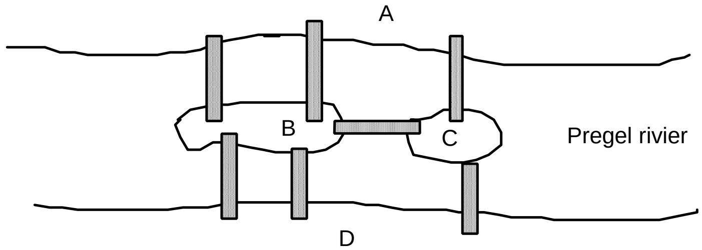
Een historisch puzzeltje dat mede ten grondslag ligt aan de opkomst van de grafentheorie is dat van de bruggen van Königsberg.

De 18-de eeuwse stad Königsberg (thans Kaliningrad in de voormalige Sovjet Unie) was gelegen aan de Pregel. Deze rivier verdeelt de stad in vier delen, die onderling verbonden zijn door zeven bruggen (tegenwoordig niet meer). De bewoners van Königsberg vroegen zich af of het mogelijk zou zijn een wandeling te maken zodanig dat men precies eenmaal over elke brug liep, om uiteindelijk weer terug te keren bij het startpunt van de wandeling. Nadat herhaalde pogingen mislukten gaven velen de moed op.

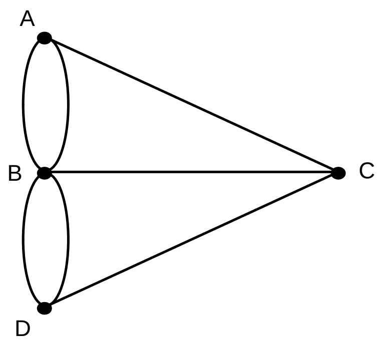


Königsberg in Pruissen, (tegenwoordig Kaliningrad, Rusland) ligt aan de Pregel

In 1736 werd dit probleempje door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) op een wiskundige manier benaderd en opgelost. Eerst ontdeed Euler de plattegrond van Königsberg van overbodige franje:



Vervolgens richtte hij zich op de kern van het probleem. Het gaat hier om 4 stukken land met daartussen 7 bruggen. Dit gaf hij als volgt schematisch weer:



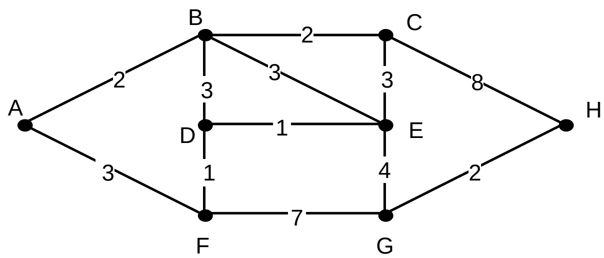
In deze *Königsberg-graaf* zijn de stukken land weergegeven als punten en de bruggen als lijnen tussen deze punten. Het oorspronkelijke probleem kan met deze schematische weergave geformuleerd worden in termen van punten en lijnen.

Opmerking
In deze inleidende paragraaf hebben we gezien dat verschillende situaties overzichtelijk kunnen worden weergegeven als een graaf, en dat is een grote steun bij het oplossen van problemen in die situaties. Kleinschalige problemen kunnen we handmatig oplossen, helaas zal dit niet meer zo eenvoudig zijn als de problemen omvangrijker worden. Daarom zijn allerlei (computer) algoritmes ontwikkeld om in zulke gevallen een langste pad (minimale projectduur) of een goedkoopste net etc. te bepalen. Enkele van die algoritmes zul je nog tegenkomen in deze reader.

Opgaven §A

A1 **De goedkoopste route**

In onderstaande graaf stellen punten steden voor die verbonden zijn door wegen (de lijnen in de graaf). De lengte van elke weg staat langs de lijnen vermeld.



De getallen worden wel gewichten genoemd en de graaf heet een *gewogen graaf*. Merk op dat deze graaf geen plattegrond op schaal is (dat geldt in het algemeen voor grafen). Een brandende vraag is:

a Wat is de kortste weg van A naar H, en hoe lang is deze? b Welke strategie heb je bedacht? Probeer je strategie in de vorm van een algoritme (recept) te formuleren.

c Bekijk het volgende recept:

HERHAAL Kleur de lichtste lijn van de graaf rood;

EINDE Klaar als A en H via een of ander rood pad (het kortste) zijn verbonden. Is dit een correct algoritme voor dit probleem?

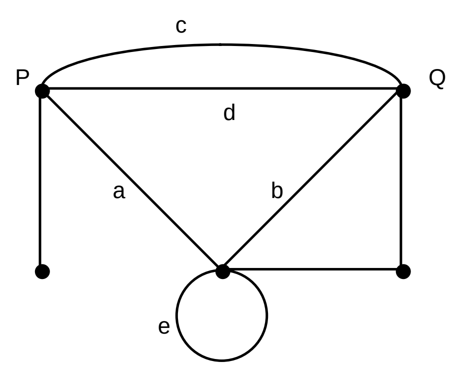
§B Basisbegrippen

Definitie B1 *graaf*

Een *graaf* is een diagram, bestaande uit punten al dan niet verbonden door één of meer lijnen;
Als de lijnen voorzien zijn van een richting spreken we van een *gerichte graaf*;
Als de lijnen voorzien zijn van een positief getal (*gewicht*) spreken we van een *gewogen graaf*.

- Punten geven we aan met hoofdletters, lijnen met kleine letters;
  Het aantal punten van een graaf geven we aan met *n*, het aantal lijnen met *m*;
- Twee verbonden punten heten *buren*, twee verbonden lijnen heten *buurlijnen*;
  We spreken van *meervoudige lijnen* als tussen twee punten meer dan één lijn loopt;
- Een *lus* is een lijn van een punt naar zichzelf;
- Een graaf zonder meervoudige lijnen en lussen heet een *enkelvoudige graaf*;
- Als van een graaf G enkele lijnen en/of punten worden weggelaten ontstaat een *deelgraaf* van G.

Voor onderstaande graaf geldt dus: $n = 5$ en $m = 8$, P en Q zijn buren, a en b zijn buurlijnen, tussen P en Q lopen meervoudige lijnen, e is een lus.

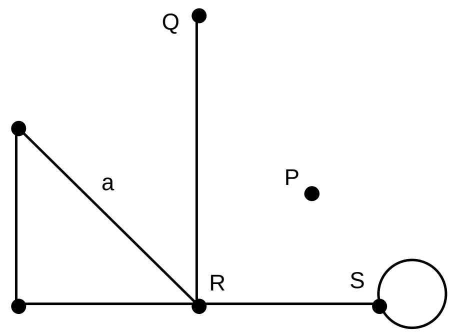


Definitie B2 *valentie van een punt in een graaf*

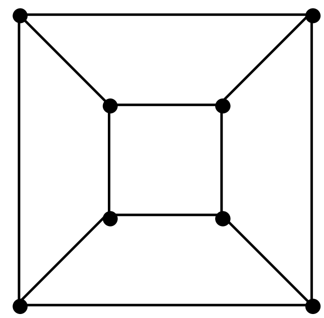
De *valentie* van een punt is het aantal lijnen dat aan punt vast zit, hierbij tellen we een lus voor 2.
In een enkelvoudige graaf kent men ook het begrip *lijnvalentie*. Onder de lijnvalentie van een lijn verstaat men het aantal andere lijnen dat vastzit aan die lijn.

- Een *geïsoleerd punt* is een punt met valentie 0, een *eindpunt* is een punt met valentie
- De *valentie-rij* van een graaf is de niet-dalende rij van valenties van de punten van de
- graaf; Een graaf G heet *regelmatig* van de *orde k* als ieder punt van G valentie *k* heeft.

Bekijk onderstaande grafen G en H:
In graaf G is P een geïsoleerd punt en Q een eindpunt. De valentie van punt R is 4, en de valentie van punt S is 3. De lijnvalentie van lijn a is 4. De valentie-rij van G is 0,1,2,2,3,4. Graaf H is een regelmatige graaf van de orde 3.



graaf G



graaf H

Bovenstaande graaf G heeft 6 lijnen en de som van alle valenties van G is 12. Dat de valentiesom precies twee maal het aantal lijnen is, is geen toeval.

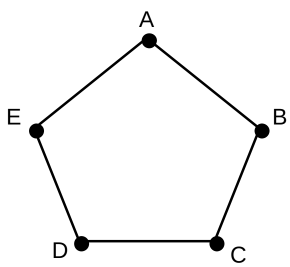
Stelling B1 Handenschud-lemma
In elke graaf is de valentie-som gelijk aan 2m .

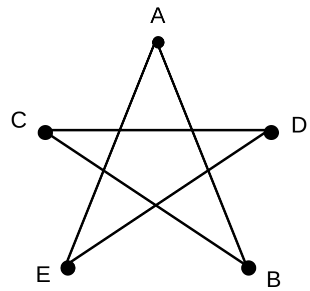
Bewijs
Elke lijn (ook een lus) draagt 2 bij aan de valentie-som van de graaf. Dus bij m lijnen is de valentie-som 2m □

Opmerking
Waar komt de naam *handenschud-lemma* vandaan? Wel, een graaf kan worden gebruikt om een groep mensen te representeren die elkaar de hand schudt: in zo'n graaf worden mensen weergegeven door punten, en twee punten worden verbonden als de corresponderende mensen elkaar begroeten door de hand te schudden. Met deze interpretatie houdt stelling B1 in dat het totaal aantal geschudde handen juist 2 keer het aantal begroetingen is. Logisch, aan elke begroeting doen twee handen mee!

Van twee personen werd de instructie gegeven om 5 punten A, B, C, D en E te tekenen en ze als volgt te verbinden: A met B, B met C, C met D, D met E en E met A.
Onafhankelijk van elkaar komen ze tot onderstaande tekeningen. Het is duidelijk dat beide tekeningen dezelfde informatie bevatten, en we zeggen daarom:

"Hier staan verschillende tekeningen van dezelfde graaf"

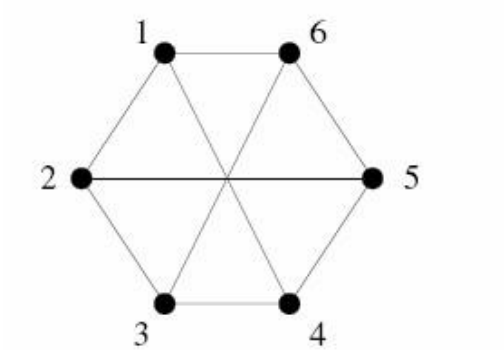


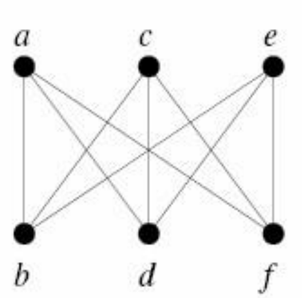


Opmerking
Een graaf levert slechts informatie ten aanzien van het **aantal** elementen en **wélke** elementen met elkaar verbonden zijn. De lengte, vorm en ligging van de verbindingslijnen is dus helemaal niet belangrijk; dat levert géén nieuwe informatie op over een graaf. Een graaf is dus geen ‘plattegrond op schaal’. Ter illustratie kan het volgende beeld dienen:

> *Stel je een aantal (verschillend gekleurde) kralen voor, waarvan sommige verbonden zijn door elastiekjes. Dit knoopsel kunnen we opvatten als een graaf. Leggen we het knoopsel plat op tafel neer, dan ontstaat een ‘tekening’ van de graaf. Natuurlijk kan men het knoopsel op verschillende manieren op tafel neerleggen, en dan ontstaan er allerlei verschillende tekeningen van de graaf. Deze tekeningen zijn in elkaar over te voeren door (op tafel) de kralen te verleggen en/of de elastiekjes te verlengen (of te verkorten).*

Als de punten van een graaf geen naam hebben, spreken we van een *ongelabelde graaf*. Van de tekeningen van twee ongelabelde grafen kunnen we natuurlijk niet zeggen of ze *dezelfde* graaf voorstellen, de punten zijn immers niet onderscheidbaar. Als er voor de punten van de beide tekeningen echter een naamgeving te verzinnen is zó dat ze dezelfde (gelabelde) graaf voorstellen, dan zeggen we dat beide ongelabelde grafen *isomorf* zijn. Hieronder zie je een voorbeeld van twee isomorfe grafen. In de tabel ernaast zie je hoe de punten met elkaar corresponderen (er zijn meer mogelijkheden).





punt	punt
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
6	f

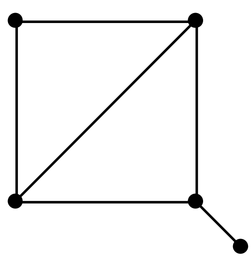
De formele definitie luidt als volgt:

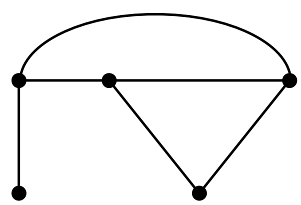
Definitie B3 *isomorfe ongelabelde grafen*

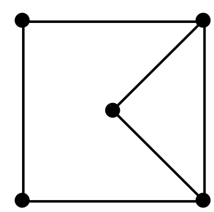
Twee ongelabelde grafen G en H heten *isomorf* als het mogelijk is de punten van G en H met dezelfde labels zó te labelen dat tussen gelijk gelabelde punten van G en H evenveel lijnen lopen.

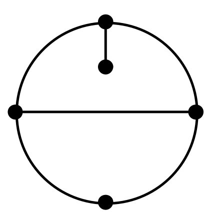
Twee isomorfe ongelabelde grafen hebben natuurlijk het zelfde aantal punten, het zelfde aantal lijnen, een identieke valentie-rij, etc. Zou het omgekeerde ook gelden? Met andere woorden: Als twee ongelabelde grafen een identieke valentie-rij hebben, zijn ze dan isomorf? In de volgende oefening en de opgaven aan het einde van de paragraaf komen we hierop terug.
Als twee ongelabelde grafen niet isomorf zijn dan moet dit blijken uit een of andere (isomorfiebewarende) eigenschap die de ene graaf wel heeft en de andere graaf niet.

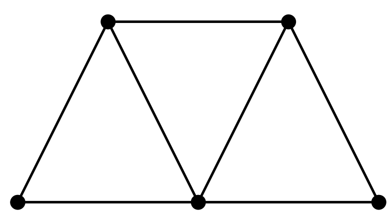
Oefening 3
Zoek uit de volgende serie alle onderling isomorfe grafen.

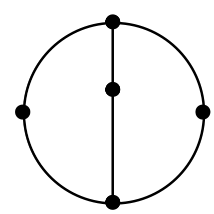

Graaf 1


Graaf 2


Graaf 3


Graaf 4


Graaf 5


Graaf 6

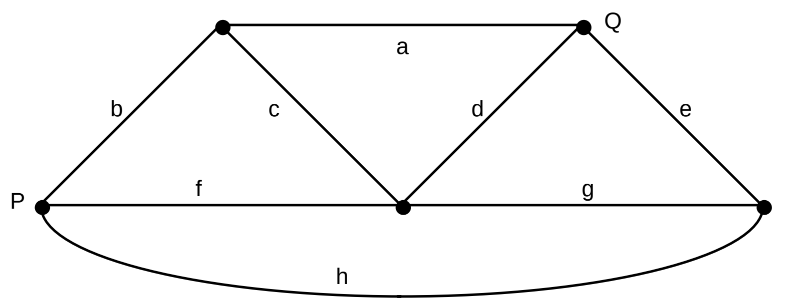
Definitie B4 *pad in een graaf*

Een *pad* in een graaf is een rij opeenvolgende verschillende lijnen.

- Een pad noteren we als de rij opeenvolgende lijnen of, als er geen misverstand mogelijk is, als de rij opeenvolgende punten van het pad;
- Paden geven we aan met Griekse letters;
- In een pad mag een punt dus meerdere keren voorkomen, een lijn niet; Het eerste punt van een pad heet *beginpunt* en het laatste punt heet *eindpunt*;
- Als begin- en eindpunt van een pad α samenvallen, heet het pad α een *circuit*;

- Een circuit van drie lijnen heet een *driehoek*, van vier lijnen een *vierhoek*, et cetera.

In onderstaande graaf zijn bcd en bcge beide paden van P naar Q, egd is een driehoek en bcgh een vierhoek.

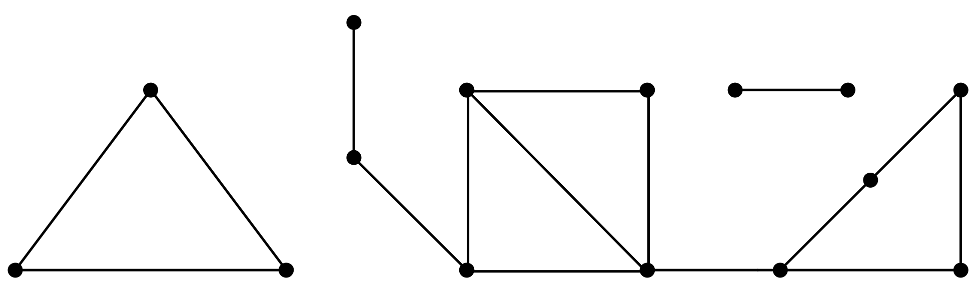


Definitie B5 *samenhangende graaf*

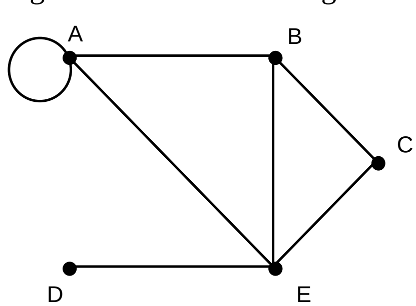
Een graaf heet *samenhangend* als er tussen elk tweetal verschillende punten van de graaf een pad is.

- Een niet-samenhangende graaf valt uiteen in een aantal *componenten*, die ieder afzonderlijk samenhangend zijn, maar onderling dus niet verbonden zijn.

Onderstaande niet-samenhangende graaf valt uiteen in 3 componenten.



Tot nu toe hebben we grafen gerepresenteerd door ze te tekenen. Echter, als we bijvoorbeeld een computer willen gebruiken om een graaf te onderzoeken, hebben we een numerieke weergave van een graaf nodig. Eén manier om een graaf numeriek weer te geven is de zogenaamde *verbindingsmatrix* van de graaf op te stellen:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Beschouw bovenstaande graaf. Om een verbindingsmatrix te krijgen, laten we de punten van de graaf corresponderen met de rijen en kolommen van een matrix, waarvan de elementen als volgt worden bepaald: op een bepaalde plaats in de matrix staat het getal 1 als de corresponderende punten buren zijn, en anders een 0. In de figuur staat rechts een verbindingsmatrix van de graaf in tabelvorm. Formeel noteer je de matrix zo

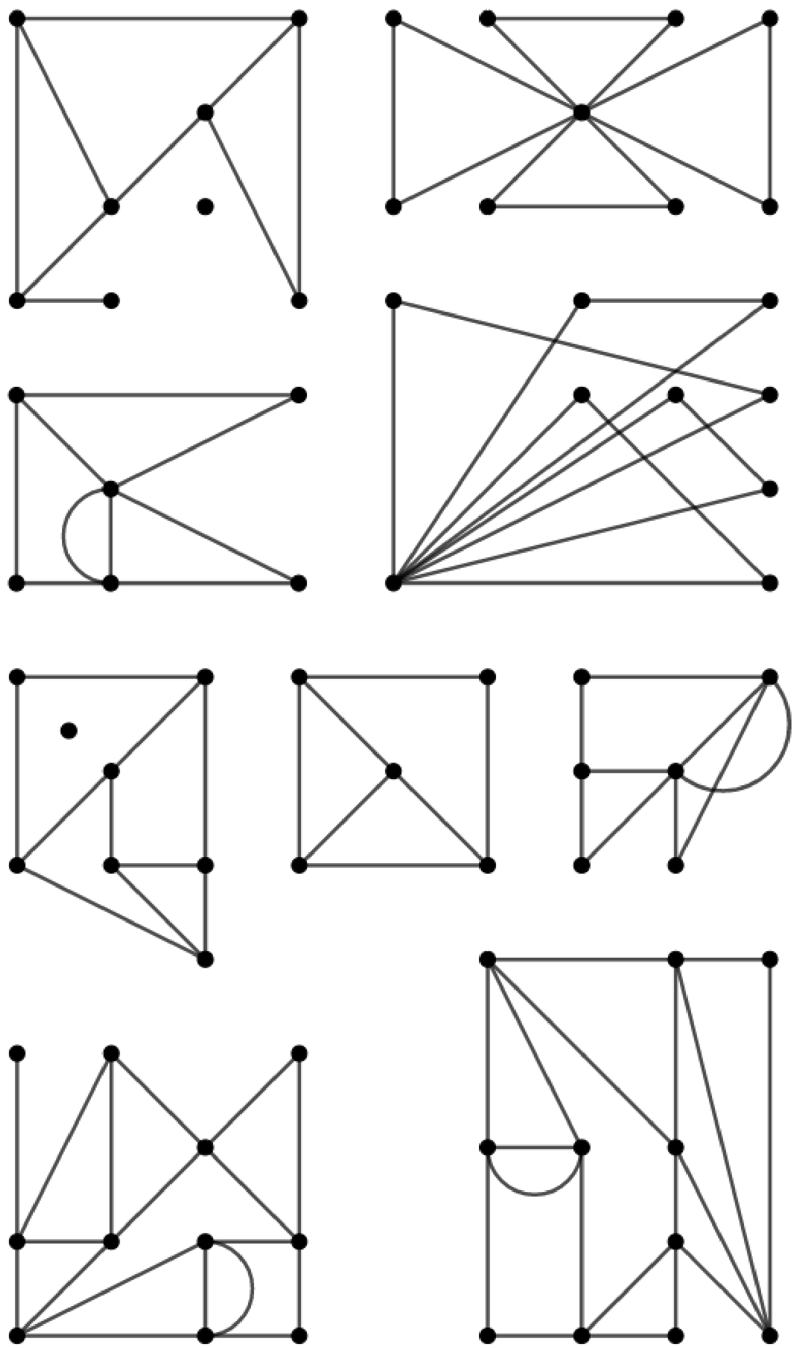
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Merk op dat de verbindingsmatrix symmetrisch is. Ook van een gerichte graaf kun je een verbindingsmatrix opstellen, maar die is dan in het algemeen natuurlijk niet meer symmetrisch.

Opgaven §B

B1 Geef voor ieder van de onderstaande grafen aan:

a. Wat n is en wat m is,
b. Of de graaf samenhangend is,
c. Of de graaf enkelvoudig is,
d. Welke lijnen meervoudig zijn,
e. Wat de valentie van ieder van de punten is.



B2 Bewijs dat elke graaf een even aantal punten van *oneven* valentie heeft.

B3 Kun je met 8 punten een enkelvoudige graaf maken met valentie-rij:

a 1,1,1,1,1,1,1,1	d 1,2,3,4,5,6,7,8
b 2,2,2,2,2,2,2,2	e 0,1,2,3,4,5,6,7
c 1,1,1,1,2,2,2,2	f 1,2,2,2,3,4,5,6

Zo nee, waarom niet? Zo ja, geef een voorbeeld.
Beantwoord deze vraag ook voor een enkelvoudige samenhangende graaf.

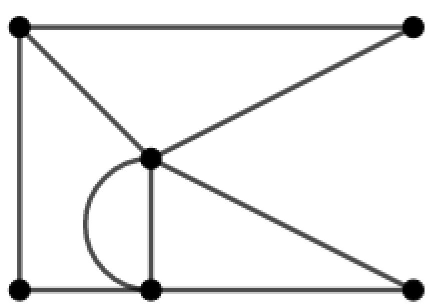
B4 a Zij G een enkelvoudige samenhangende graaf met n punten.
Wat is het minimum aantal lijnen van G? Wat is er zo bijzonder aan zo'n graaf?
b Zij G een enkelvoudige graaf met 7 punten en 3 componenten.
Wat is het maximum aantal lijnen van G? Teken zo'n graaf G.

B5 a Bewijs dat in een enkelvoudige graaf (met $n > 2$) minstens twee punten met gelijke valentie voorkomen (hint: wat is de maximale valentie?).

b Toon aan dat in elke groep van twee of meer mensen er altijd twee personen zijn met hetzelfde aantal vrienden binnen de groep.

B6

a. Maak van de onderstaande graaf een matrix



b. Maak van de onderstaande matrix een graaf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

B7 a Laat zien dat er (tot op isomorfie na) precies 4 enkelvoudige grafen met drie punten bestaan.
b Hoeveel zijn er met vier punten? Teken ze allemaal!

Opmerking

Het aantal (niet isomorfe) grafen met n punten neemt snel toe als *n* groter wordt, zoals je kunt zien in de volgende tabel:

n	*aantal grafen met n punten*
1	1
2	2
3	.....
4	.....
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	308708

Men heeft nog geen formule ontdekt voor het aantal grafen met *n* punten.

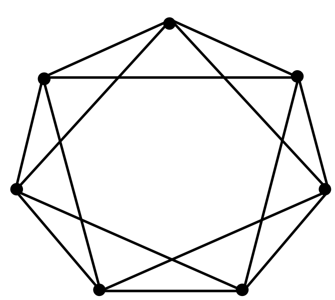
B8 Teken alle (tot op isomorfie) enkelvoudige grafen met valentie-rij 2, 2, 2, 3, 3, 4.

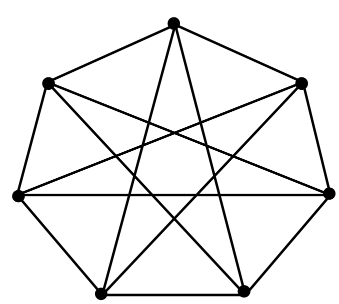
B9 Ga van elk van de volgende beweringen na of deze waar of onwaar is:

a. Als G en H isomorf zijn, dan hebben ze evenveel punten en lijnen.
b. Als G en H evenveel punten en lijnen hebben, dan zijn G en H isomorf.
c. Als G en H isomorf zijn, dan hebben ze dezelfde valentie-rij.
d. Als G en H dezelfde valentie-rij hebben, dan zijn G en H isomorf.

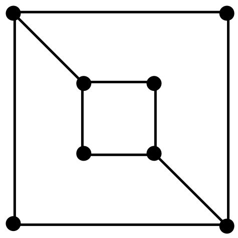
B10

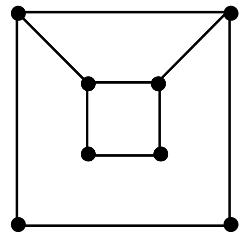
a. Ga van de volgende grafen met hun matrix na of ze isomorf zijn.





b. Dezelfde vraag voor onderstaande grafen.





B11 Alle punten van een graaf G zonder lussen of meervoudige lijnen hebben valentie/graad 2.

a) Bepaal het aantal lijnen van zo’n graaf G.
b) Teken alle onderling niet-isomorfe grafen als de graaf precies 8 punten heeft
c) Hoeveel onderling niet-isomorfe grafen zijn er als de graaf uit 12 punten bestaat. Deze hoef je niet te tekenen!

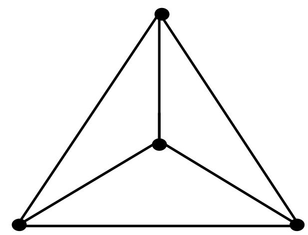
B12 Onderzoek welke grafen in opgave B1 isomorf zijn. Geef dit aan met behulp van een handige labeling van de punten. Maak voor ieder tweetal isomorfe grafen de bijbehorende verbindingsmatrix.

§C Enkele speciale grafen

Definitie C1 *volledige graaf*

Als tussen elk tweetal punten van een graaf G één lijn loopt, heet G *volledig.*

- Een volledige graaf met n punten noteren we als K_n.
- Hieronder is de volledige graaf K_4 getekend.



Oefening 4

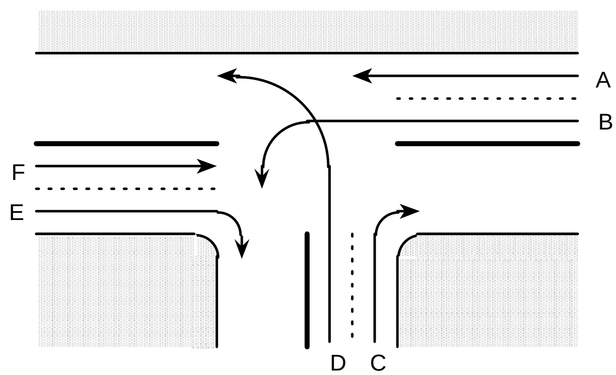
a. Teken K_3 en K_5.

b. Is een volledige graaf regelmatig? Wat is de som van de valenties van K_5?

c. Geef een formule voor het aantal lijnen van K_5.

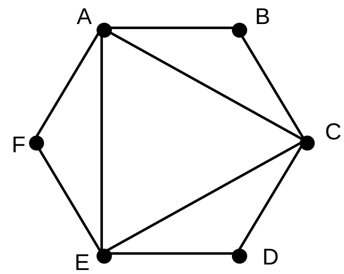
Voorbeeld: Verkeerslichtenregeling

Bekijk de onderstaande T-splitsing. Sommige verkeersstromen zijn *compatibel*, dat wil zeggen dat ze elkaar *op het zelfde moment* zonder gevaar verdragen. Zo is stroom A compatibel met de stromen B, C, E en F, maar niet met D. Stroom F is compatibel met de stromen A en E, maar niet met de stromen B, C en D.



We kunnen deze compatibiliteit weergeven in een *compatibiliteit-graaf* waarin de punten corresponderen met verkeersstromen, en lijnen tussen compatibele stromen getrokken worden.

De compatibiliteit-graaf van deze splitsing ziet er als volgt uit:

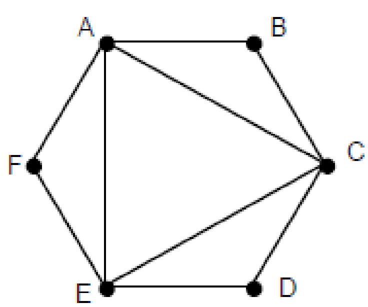


Veronderstel dat een verkeerskundige een verkeerslichtenregeling wil maken voor deze splitsing. Hoe kunnen de lichten efficiënt op elkaar worden afgestemd, zó dat incompatibele stromen niet tegelijkertijd voorkomen?
Wel, we kunnen oplossingen vinden door goed te kijken naar de compatibiliteit-graaf. Omdat ons doel is *zoveel mogelijk verkeer simultaan te laten stromen*, zijn we eigenlijk geïnteresseerd in deelgrafen van de compatibiliteit-graaf, die deze eis weerspiegelen. Dat betekent dat we op zoek zijn naar *volledige deelgrafen*, want die corresponderen met stromen die wederzijds compatibel zijn. Voorbeelden van zulke volledige deelgrafen zijn de driehoeken gevormd door de punten ABC, AEF, ACE en CDE.

We vatten de werkwijze nog eens samen:

1 Teken de compatibiliteit-graaf.
2 Bepaal voor élk punt de grootste volledige deelgraaf.
3 Selecteer vervolgens een aantal van deze deelgrafen zó dat alle punten van de compatibiliteitgraaf in deze selectie van deelgrafen voorkomen.

Stap 1



Stap 2

A : ~~ABC~~ , ~~ACE~~ , ~~AEF~~
B : ABC
C : ~~ABC~~ , ~~ACE~~ , CDE
D : CDE
E : ~~CDE~~ , ~~ACE~~ , ~~AEF~~
F : AEF

Stap 3

Selectie deelgrafen

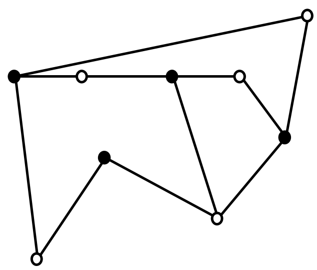
ABC (want B daarin)
CDE (want D hierin)
AEF (want F hierin)

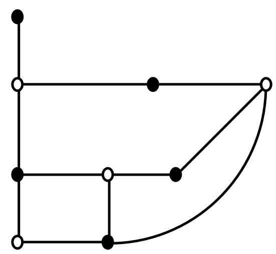
Merk op dat er meerdere manieren zijn om een selectie uit de deelgrafen te kiezen. In stap 3 hadden we bijvoorbeeld ook de deelgrafen ACE, ABC, AEF, CDE kunnen kiezen.
Afhankelijk van de grootte van de verkeersstromen, benodigde tijd en eventuele andere criteria, kunnen bepaalde selecties van deelgrafen de voorkeur hebben boven anderen. Zulke criteria laten wij hier echter buiten beschouwing.

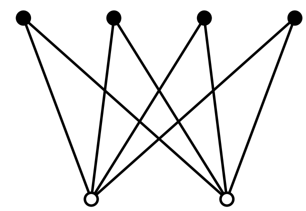
Definitie C2 *tweedelige graaf*

Een graaf heet *tweedelig* als de punten van de graaf in twee groepen W (witte punten) en Z (zwarte punten) **kunnen** worden verdeeld zó dat elke lijn van de graaf een wit punt verbindt met een zwart punt. Een *volledige tweedelige* graaf is een enkelvoudige tweedelige graaf waarbij élk wit punt verbonden is met élk zwart punt.

- Onderstaande grafen zijn tweedelig (let op: ook als de tweedeling in witte en zwarte punten nog niet zou zijn aangebracht, waren deze grafen tweedelig!)





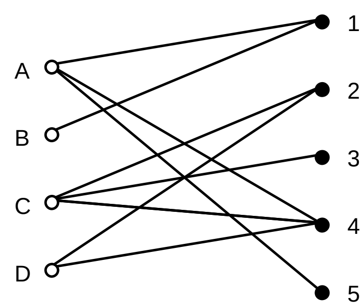


- $K_{p,q}$ is de notatie voor een volledige tweedelige graaf, waarbij p het aantal punten uit de ene groep is en q het aantal punten uit de andere groep.
- Hiernaast is de volledige tweedelige graaf $K_{2\ 4,}$ getekend.

Voorbeeld: Vacatures en sollicitanten

Een bedrijf heeft vijf vacatures van verschillende aard en vier sollicitanten voor deze vacatures. Sommige sollicitanten blijken geschikt voor meer dan één van de vacatures. Is het voor het bedrijf mogelijk om alle vier personen aan een passende baan te helpen? De personen geven we aan met A, B, C en D terwijl we de banen aangeven met de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5. De gegevens:

sollicitant	**geschikt voor vacature**
A	1, 4 , 5
B	1
C	2 , 3 , 4
D	2 , 4



We kunnen de situatie beschrijven door een graaf, waarvan de punten in twee groepen verdeeld zijn (witte punten corresponderen met sollicitanten en zwarte punten corresponderen met vacatures) en waarin elke lijn een sollicitant koppelt aan een passende baan:

Oefening 5

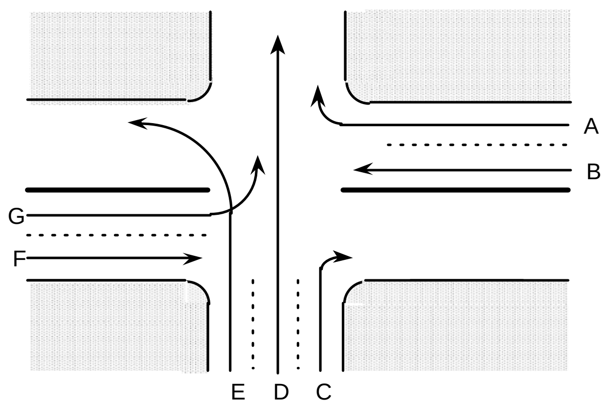
Beschrijf alle mogelijke oplossingen voor dit koppelprobleem.

Oefening 6

Hoeveel punten en lijnen heeft $K_{p,q}$?

Opgaven §C

C1 Beschouw de volgende kruising:



Teken de bijbehorende compatibiliteit-graaf G en bepaal een geschikte verkeerslicht-regeling (over tijdsinstelling hoef je geen uitspraak te doen).

C2 De jeugdcommissie van een bescheiden tennisvereniging wil voor haar 16 jeugdleden (8 jongens en 8 meisjes) een toernooi organiseren waarbij alléén gemengd-dubbel wordt gespeeld. De jongens en meisjes mogen op een lijstje hun voorkeurpartners opgeven. De voorkeur moet wederzijds zijn. Hieronder is het resultaat weergegeven:

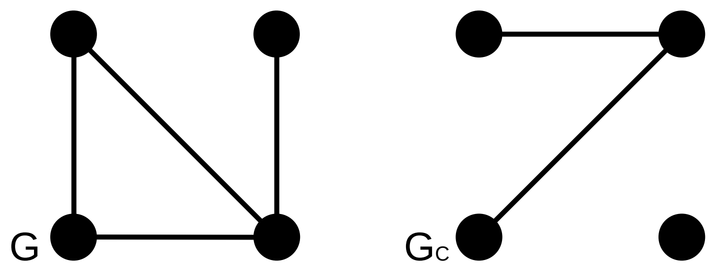
Anton	Ine, Jet en Karin
Bert	Jet, Marian en Petra
Chris	Ine, Lea en Petra
Dik	Karin en Nel
Erik	Jet en Marian
Frank	Marian en Petra
Gerard	Jet en Petra
Hans	Lea, Nel en Olga

a Vertaal de gegevens van dit koppelprobleem naar een tweedelige graaf.
b Kan iedereen tevreden worden gesteld?

C3 Zij G een enkelvoudige graaf. Onder het *complement* G^C van G verstaan we de graaf waarvoor geldt:

- De puntverzameling van G^C is dezelfde als de puntverzameling van G.
- Twee verschillende punten van G^C zijn buren in G^C dan en slechts dan als deze punten in G *geen* buren zijn.

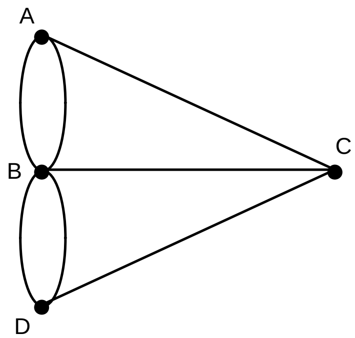
Hieronder een voorbeeld van een graaf en zijn complementaire graaf



a. Leg uit dat het complement van een regelmatige graaf ook regelmatig is.
b. Bepaal zonder te tekenen het complement van $K_{4,3}$. Leg uit.
c. Een graaf G heet zelf-complementair als G isomorf is met G^C.
Geef een voorbeeld van een zelf-complementaire graaf met 5 punten.
d. Bewijs dat het aantal punten van een zelf-complementaire graaf altijd een 4-voud óf een 4-voud+1 is.

§D Eulergrafen

We bekijken nogmaals de Köningsberg-graaf.



Köningsberg-graaf

Leonhard Euler 1707 - 1783

De vraag naar de bewuste rondwandeling kan nu, met de terminologie uit §B, op de volgende wijze vertaald worden in grafentaal: bestaat er in deze graaf een circuit, waarin elke lijn van de graaf precies éénmaal voorkomt? Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie:

Definitie D1 *Eulergraaf*

Een samenhangende graaf G heet een *Eulergraaf* als er een circuit in G bestaat, waarin elke lijn van G éénmaal voorkomt. Zo'n circuit heet dan een *Eulercircuit*.

- Een vraag die naar aanleiding van deze definitie onmiddellijk bij je opkomt is of er *nodige* en *voldoende voorwaarden* zijn voor een graaf om een Eulergraaf te zijn.

<u>Intermezzo</u>
We spreken van een *nodige voorwaarde* als het resultaat (bijvoorbeeld het bestaan van een Eulercircuit) zonder deze voorwaarde niet kan optreden. Dit garandeert echter nog niet dat het resultaat daadwerkelijk optreedt!
Een *voldoende voorwaarde* garandeert het optreden van het resultaat wel.

Neem als voorbeeld een enkelvoudige graaf G, zonder circuits, die bestaat uit n punten. We willen weten onder welke voorwaarden G samenhangend is.

Nodige voorwaarde: de valentie van ieder punt is minstens 1.
Zonder deze voorwaarde bestaat er minstens één geïsoleerd punt en is de graaf dus duidelijk niet samenhangend. Het is echter niet moeilijk om een graaf te vinden die voldoet aan de nodige voorwaarde, maar toch niet samenhangend is (teken zelf zo’n graaf).

Voldoende voorwaarde: de graaf bevat n-1 lijnen.

Een graaf die aan deze voorwaarde voldoet is altijd samenhangend. Probeer maar eens een graaf te vinden die aan deze voorwaarde voldoet, maar die niet samenhangend is. In §F zullen we bewijzen dat dit inderdaad niet mogelijk is, dus dat deze voorwaarde voldoende is.

Terug naar Eulergrafen:

Stelling D1 *nodige én voldoende voorwaarde voor een Eulergraaf*

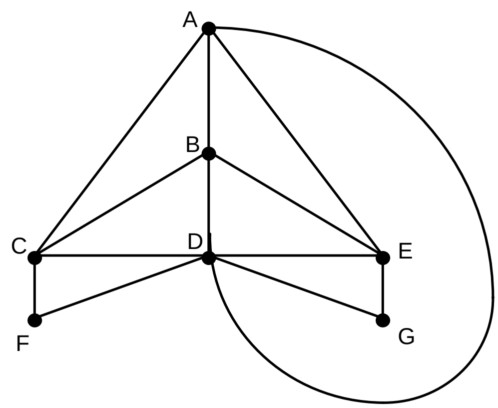
Zij G een samenhangende graaf. Dan geldt:
G is een Eulergraaf $\Leftrightarrow$ Elk punt van G heeft even valentie.

Bewijs

$\Rightarrow$ Gegeven is dat G een Eulergraaf is, dus G bezit een Eulercircuit. We moeten bewijzen dat elk punt van G even valentie heeft.
Zij P een willekeurig punt van G. Het Eulercircuit levert bij élk bezoek aan P een bijdrage 2 aan de valentie van P. De valentie van P is daarom een veelvoud van 2, dus een even getal.

$\Leftarrow$ We gaan dus uit van een samenhangende graaf G, waarvan ieder punt even valentie heeft. Kies een willekeurig punt P van G. We construeren nu op de volgende manier een pad α met beginpunt P. Voeg, bij aankomst in een bepaald punt, steeds een lijn toe die nog niet eerder is gebruikt (Waarom kan dat?).
Daar de graaf G slechts eindig veel lijnen bezit, moet dit proces na verloop van tijd stoppen. Maar het proces kan alléén maar gestopt zijn bij het punt P zelf: voor elk ander punt geldt immers dat, telkens als we daar aankomen, we er óók weer kunnen vertrekken (elk punt heeft even valentie). Het aldus geconstrueerde pad α is dus een circuit ! Als α alle lijnen van G bevat, is α een Eulercircuit en zijn we klaar.
Als α niet alle lijnen van G bevat, beschouwen we de deelgraaf G* van G die uit G ontstaat door alle lijnen van α te verwijderen, samen met eventueel hierdoor ontstane geïsoleerde punten. Elk punt van G^* heeft natuurlijk nog steeds een even valentie (waarom?). Nu bevat G^* zeker een punt Q van α, want G is samenhangend. We construeren nu, op analoge wijze als zojuist in G is gebeurd, een circuit β in G^* vanuit Q naar Q. Door nu in α op de plaats van Q het pad β tussen te voegen ontstaat een circuit, dat langer is dan α.
Als dit verlengde circuit nog stééds niet alle lijnen van G bevat, verlengen we deze weer op dezelfde wijze als voorheen. Daar G slechts eindig veel lijnen bezit, moet deze constructie uiteindelijk leiden tot een Eulercircuit in G. $\square$

Oefening 7
Het bewijs van stelling D1 is een voorbeeld van een *constructief bewijs*. Door dit bewijs letterlijk te volgen, is in de praktijk ook een Eulercircuit te construeren.
Het aangeven van de verschillende circuits, waarvan je in elke fase steeds één weglaat, kan mooi met verschillende kleuren gebeuren.



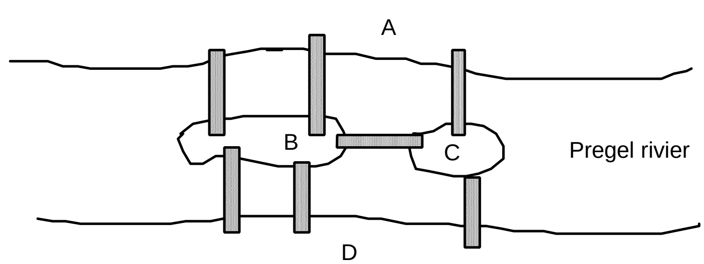
a Waarom is bovenstaande graaf G een Eulergraaf?

b Construeer een Eulercircuit in deze graaf, door het bewijs van stelling D1 ⇐ letterlijk te volgen, te beginnen met punt G en het circuit α = GEABDG.

In het resterende gedeelte van deze paragraaf bekijken we met Eulergrafen verwante problemen, te weten semi-Eulergrafen en het Chinese postbode probleem.

semi-Eulergrafen

De gezochte rondwandeling door Koningsbergen was niet mogelijk omdat de Köningsberg-graaf geen Eulergraaf is.



Stel nu eens dat de inwoners van Köningsberg nog steeds geïnteresseerd zijn in zo'n wandeling over élke brug, maar al tevreden zijn met een verschillend start- en eindpunt. Is een dergelijke wandeling wél mogelijk? Deze vraag geeft aanleiding tot de volgende definitie:

Definitie D2 *semi-Eulergraaf*

Een samenhangende graaf G heet een *semi-Eulergraaf* als er een niet-gesloten pad in G bestaat, waarin elke lijn van G éénmaal voorkomt. Zo'n pad heet *een Eulerpad*.

Stelling D2 *nodige én voldoende voorwaarde voor een semi-Eulergraaf*

Zij G een samenhangende graaf. Dan geldt:
G is een semi-Eulergraaf ⇔ G heeft precies twee punten van oneven valentie.

Bewijs

⇒ Veronderstel dat G een semi-Eulergraaf is. Dan is er dus een Eulerpad met beginpunt A en eindpunt B ($\neq$A). Als we een lijn AB toevoegen aan de graaf G ontstaat een Eulergraaf G^+, waarin volgens stelling D1 élk punt even valentie heeft. Als we AB weer uit G^+ verwijderen krijgen we graaf G terug, zodat duidelijk is dat A en B de enige punten van G zijn met oneven valentie.

⇐ Stel dat een samenhangende graaf G precies twee punten van oneven valentie heeft, zeg A en B. Als we aan G een lijn AB toevoegen ontstaat een graaf G^+ ....

Als een graaf precies twee punten heeft met oneven valentie dan is het dus een semi-Eulergraaf. Zo'n graaf is met *één ononderbroken pennenstreek* (pen mag niet van het papier af) te tekenen zonder een lijn dubbel te trekken; teken maar volgens een Eulerpad! Uiteraard kan dit ook als er geen enkel punt met oneven valentie is (je tekent dan een gesloten Eulerpad).
Maar als de graaf nu eens méér dan twee punten van oneven valentie heeft, wat is dán het minimum aantal pennenstreken dat nodig is om die graaf te tekenen? De volgende stelling geeft antwoord.

Stelling D3 *nodige én voldoende voorwaarde voor een semi-Eulergraaf*

Zij G een samenhangende graaf met 2k punten van oneven valentie.
Het kleinste aantal paden dat samen precies alle lijnen van G bedekken is k.

Bewijs

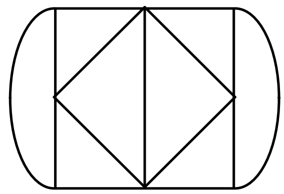
(1) Het kán met k paden.
Laten P_1, P_2,...,P_n en Q_1, Q_2, ...,Q_n de 2k punten van oneven valentie zijn (de verdeling in de twee groepen is willekeurig). Voeg nu tijdelijk de volgende k lijnen toe aan de graaf G:

$$(P_1, Q_1),\ (P_2, Q_2)\ ,...,(P_k\ , Q_k)$$

Als P_s en Q_s ($s \leq k$) al door een lijn waren verbonden, tekenen we een extra lijn. In de nieuwe graaf G^+heeft nu elk punt even valentie, dus bevat G^+een Eulercircuit. Door de k toegevoegde lijnen uit dit Eulercircuit van G^+ te verwijderen ontstaan k paden die samen alle lijnen van G bedekken.

(2) Met minder dan k paden kan het niet.
Elk punt van oneven valentie moet óf startpunt óf eindpunt zijn van minstens één zo'n pad (het kan geen tussenpunt zijn want daar moet de valentie even zijn). Dus zijn er minstens k paden nodig. □

Oefening 8
Wat is het kleinste aantal ononderbroken pennestreken waarmee je deze pentekening kunt maken?



Het Chinese postbode probleem

Een postbode wil de post in zijn rayon rondbrengen en dan terugkeren op het postkantoor. Hij wil dit zo efficiënt mogelijk doen, dus de totaal afgelegde afstand moet minimaal zijn. Hoe moet hij zijn route plannen?

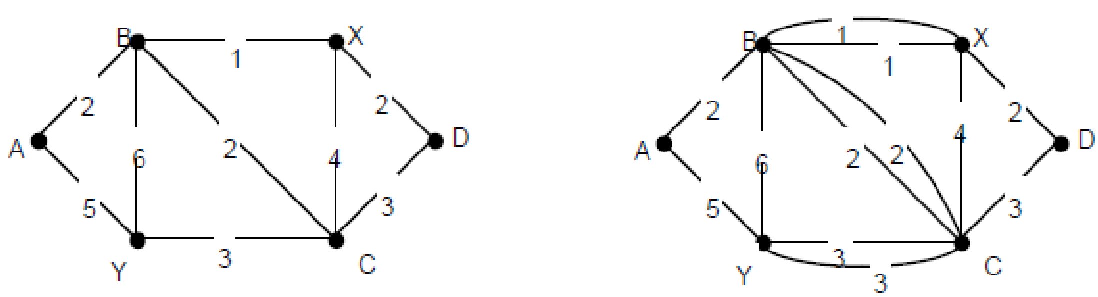
Dit probleem staat bekend als het Chinese postbode probleem, voor het eerst geformuleerd in 1962 door de Chinees Mei Ko Kuan. Vergelijkbare problemen zijn het zoeken naar een optimale route voor een pekelwagen in een besneeuwd wegennet of van een vuilnisauto in een stadswijk.

Als we het stratenplan van het rayon van de postbode in de vorm van een graaf gieten (wat zijn lijnen en punten?), luidt het probleem in grafentaal:

Vind in een gewogen graaf een gesloten route van minimaal totaalgewicht, dat élke lijn minstens een keer bevat.

Als de graaf van het stratenplan toevallig een Eulergraaf is dan is dit probleem simpel, want in dat geval kiest de postbode gewoon een Eulercircuit.

In het *algemene geval* echter zal de postbode sommige straten twee of meer keren moeten doorlopen. Hij wil dit zo doen dat de gewichtensom van de dubbel doorlopen straten minimaal is. Men heeft een methode gevonden om ook dit algemene geval op te lossen. We kunnen een idee krijgen van deze methode door het speciale geval te bekijken van graaf (a) met *precies twee punten X en Y van oneven valentie*:



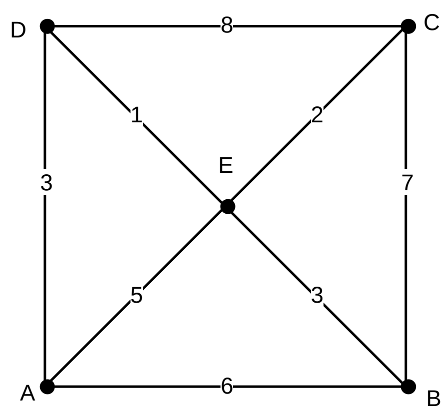
(a) (b)

Eenvoudig is met de hand na te gaan dat XBCY het kortste pad is van X naar Y, met een totale lengte van 1+2+3=6. Als we elke lijn van dit pad "verdubbelen" ontstaat een Eulergraaf (b). De gevraagde postbode-route in graaf (a) krijgen we door in de Eulergraaf (b) een Eulercircuit te nemen, zoals bijvoorbeeld ABXDCXBCBYCYA. Merk op dat de enige dubbel gelopen lijnen die van het pad XBCY zijn.

Voor grafen met méér dan twee punten van oneven valentie kunnen we deze methode aanpassen door dergelijke punten op alle mogelijke manieren in paren te verdelen en vervolgens telkens alle paren te verbinden met kortste paden. In de graaf van onderstaande oefening met vier punten van oneven valentie zullen dan 3 verschillende combinaties van telkens twee puntenparen moeten worden verbonden door kortste paden.

Oefening 9

Los het Chinese postbode-probleem op voor de volgende graaf

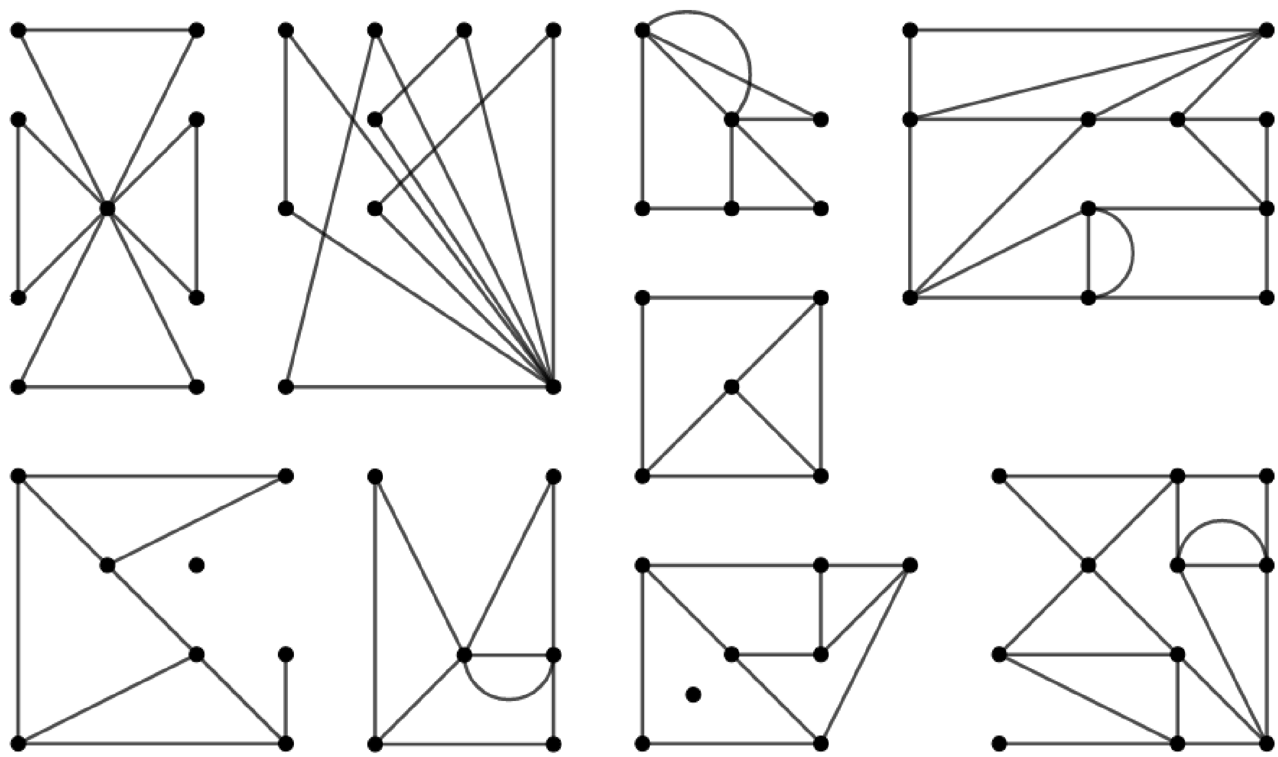


Voor de “kleine” graaf uit oefening 13 waren er 3 manieren om paren te maken. Bij grotere grafen met nog meer punten met oneven valentie zal het zoeken van een oplossing bewerkelijker worden. Bovendien wordt dan ook het bepalen van kortste paden een moeilijker probleem. Op dat laatste onderdeel wordt in paragraaf I ingegaan.

Opgaven §D

D1

a. Geef van de onderstaande grafen aan of ze Euler zijn of niet en geef een Eulercircuit door de lijnstukken te nummeren. Geef bij één van de grafen nog een tweede mogelijk Euler-circuit.



b. Wat is het kleinste aantal ononderbroken pennestreken waarmee je deze grafen kunt tekenen?

c. Maak alle grafen Euler door een minimum aantal lijnen toe te voegen.

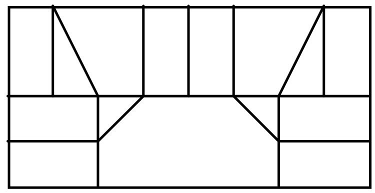
D2 Hoeveel extra bruggen zijn er in Köningsberg minimaal nodig, opdat de gevraagde rondwandeling mogelijk is? Waar moeten die bruggen komen?

D3 a. Voor welke n is K_n een Eulergraaf?

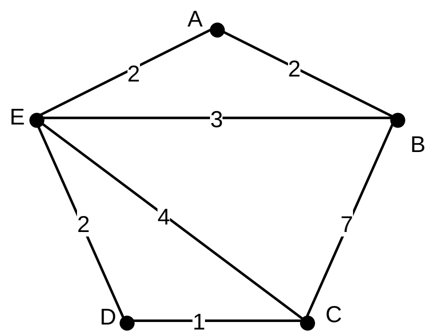
b. Voor welke p en q is $K_{p,q}$ een Eulergraaf? En een semi-Eulergraaf?

D4 Teken een Eulergraaf met een even aantal punten en een oneven aantal lijnen.

D5 a. Wat is het kleinste aantal ononderbroken pennestreken waarmee je de graaf $K_{27\ 101,}$ kan tekenen.
b. Dezelfde vraag voor onderstaande tekening.



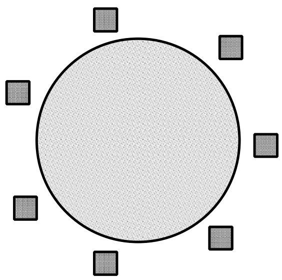
D6 Los het Chinese postbode probleem op voor de volgende graaf:



§E Hamiltongrafen

Voorbeeld: Tafelschikkingsprobleem

We beginnen deze paragraaf met een tafelschikkingsprobleem. Zeven personen, die elkaar niet allemaal kennen, gaan uit eten. In het restaurant wil de groep aan een ronde tafel plaatsnemen, maar wel zó, dat iedereen beide buren kent:



Els	kent	Bram en Marijke
Dirk	kent	Louise, Bram en Joop
Arend	kent	Louise, Joop en Marijke
Louise	kent	Dirk en Arend
Bram	kent	Joop, Els, Dirk en Marijke
Marijke	kent	Els, Arend en Bram
Joop	kent	Dirk, Arend en Bram

In de volgende oefening gaan we dit probleem grafentechnisch oplossen.

Oefening 10

Maak een passende graaf bij deze situatie. Wat stelt een punt voor? Wat een lijn? Hoe kun je het probleem grafentheoretisch vertalen? Los het probleem op. Hoeveel verschillende oplossingen zijn er?

Als een samenhangende graaf een circuit bevat waarin élke lijn van de graaf precies één keer voorkomt, heet de graaf een Eulergraaf. In het tafelschikkingsprobleem hoopten we echter dat de graaf een circuit bevat waarin élk punt van de graaf precies één keer voorkomt. Zo'n graaf heet een Hamiltongraaf.

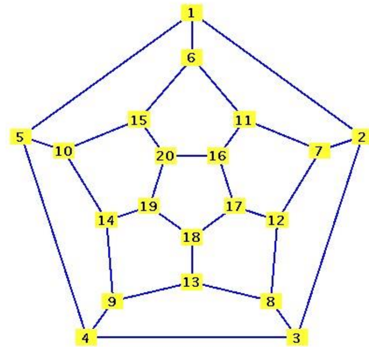
Sir William Rowan Hamilton 1805 –1865

Definitie E1 *Hamiltongraaf*

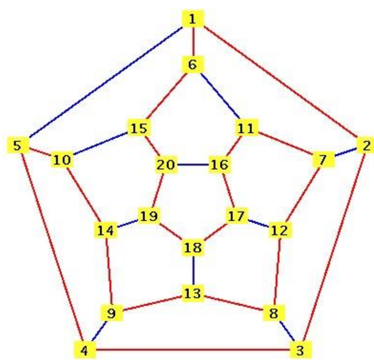
Een graaf G heet een *Hamiltongraaf* als er een circuit in G bestaat, waarin élk punt van G precies één keer voorkomt. Zo'n circuit heet dan een *Hamiltoncircuit.*
Een graaf G heet een *semi-Hamiltongraaf* als er een niet-gesloten pad in G bestaat, waarin élk punt van G precies één keer voorkomt. Zo'n pad heet een *Hamiltonpad.*

Opmerking

De naam *Hamiltongraaf* is afkomstig van de Britse wiskundige Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Hij bracht in het midden van de negentiende eeuw een puzzeltje op de markt in de vorm van een dodecaëder. Bij elk van de 20 hoekpunten van het regelmatige twaalfvlak stond de naam van een wereldstad en het probleem was om langs de ribben reizend élke stad precies één keer aan te doen, en te eindigen bij het startpunt van de reis. Het puzzeltje zelf was van hout en in elk hoekpunt was een spijker geslagen, zodat je door een touw rond de spijkers te spannen een reis rond de wereld kon uitstippelen.



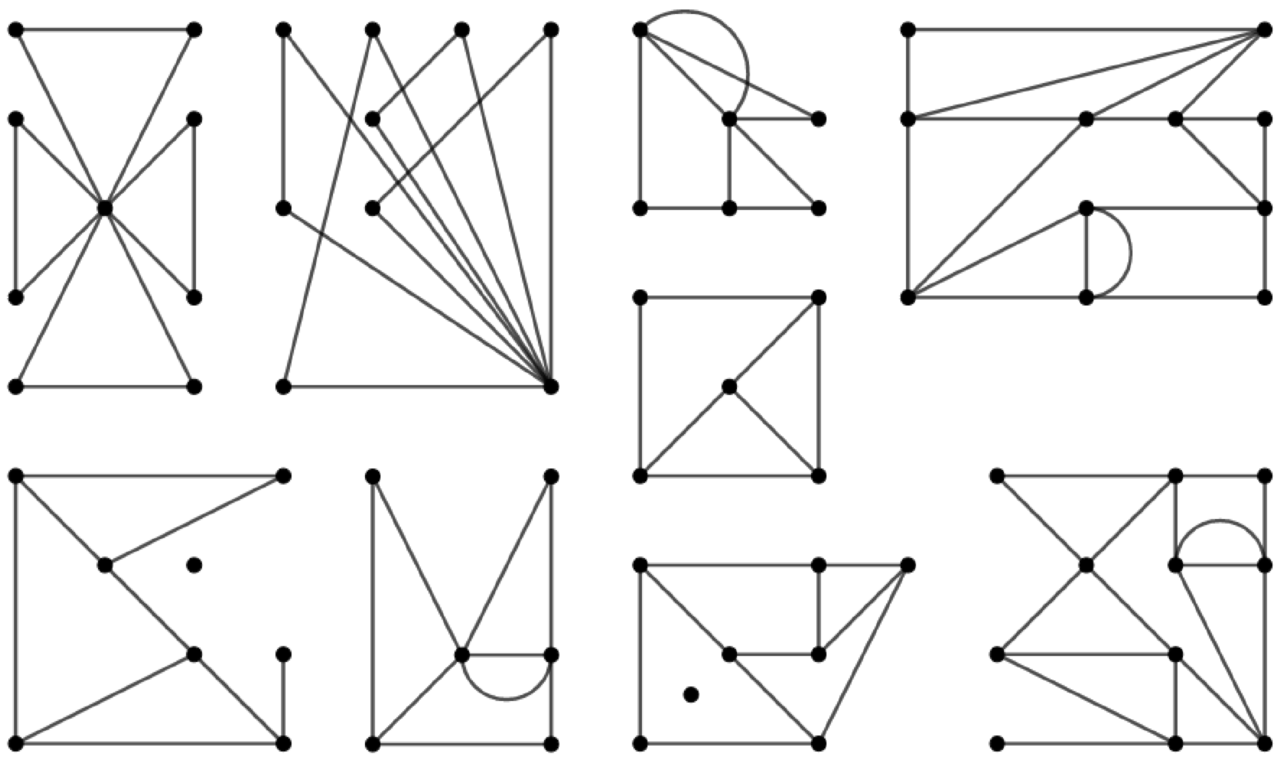
In de bovenstaande figuur zijn een dodecaëder en de bijbehorende platonische graaf getekend. Direct duidelijk is dat het oplossen van het Hamilton-puzzeltje overeenkomt met het vinden van een Hamiltoncircuit in de platonische graaf. Een oplossing is hieronder weergegeven.



Opgaven §E

E1 Hierbij nogmaals de grafen uit paragraaf B en D.

a. Geef van ieder van deze grafen aan of het een Hamiltongraaf is. Maak de gevonden Hamiltoncircuits rood.



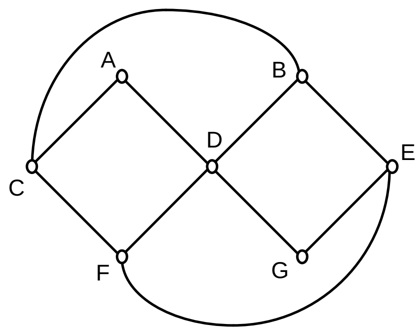
b. Voeg aan de grafen die geen Hamiltongrafen zijn een minimaal aantal lijnen toe zodat de ze wel Hamiltons zijn.

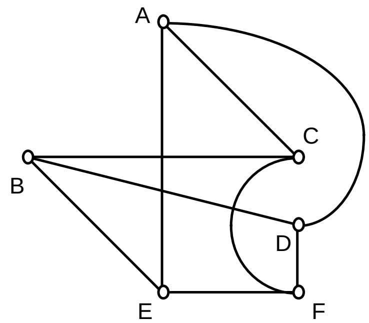
E2 Geef een voorbeeld van een graaf, die

a. een Eulergraaf is, maar geen Hamiltongraaf is.
b. een Hamiltongraaf is, maar geen Eulergraaf is.
c. geen Eulergraaf én geen Hamiltongraaf is.
d. zowel een Hamiltongraaf als een Eulergraaf is.

E3 a Wat kun je zeggen over het aantal punten van een tweedelige Hamiltongraaf?

b Laat zien dat onderstaande grafen tweedelig zijn door kleuring van de punten. Ga van beide grafen na of het Hamiltongrafen zijn.

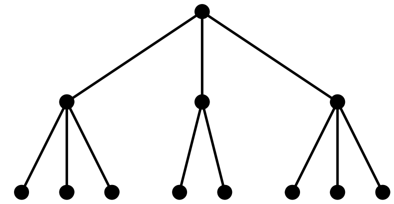




E4 a Voor welke n is K_n een Hamiltongraaf?

b Voor welke p en q is $K_{p\,q}$, een Hamiltongraaf?

§F Bomen



Boomstructuren komen in zeer verschillende contexten voor, denk maar eens aan:

- zoekbomen
- directory-structuren op een computer
- stambomen
- boomdiagrammen in de kansrekening

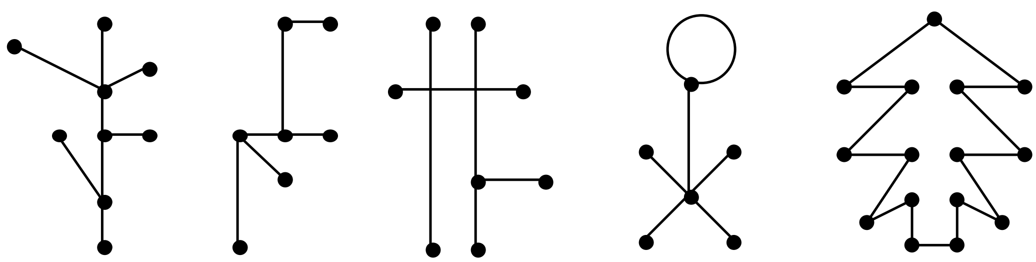
Zo'n boomstructuur kunnen we opvatten als een speciaal type graaf, namelijk een graaf waarin geen circuits voorkomen. Over dit soort grafen gaat deze paragraaf.

Definitie F1 *boom*

Een boom is een samenhangende graaf zonder circuits.

Oefening 11

a. Welke van onderstaande grafen is een boom?
b. Tel bij de bomen eens het aantal lijnen. Valt je wat op?



(a) (b) (c) (d) (e)

Stelling F1 *definiërende eigenschap van een boom*

Voor een samenhangende graaf G met n punten geldt:
G is een boom $\Leftrightarrow$ G heeft $n-1$ lijnen

Bewijs

$\Rightarrow$ Gegeven is dat G een boom is. We moeten bewijzen dat er $n-1$lijnen zijn.
Wel, beginnend met één punt kunnen we de boom G opbouwen door telkens een nieuwe lijn met een nieuw punt toe te voegen (zo ontstaan geen circuits). Het aantal punten is bij aanvang 1 en het aantal lijnen 0. Tijdens de constructie komt er telkens een lijn én een punt bij. Dus aan het eind van de constructie is het aantal punten nog steeds 1 meer dan het aantal lijnen!

⇐ Gegeven is nu dat de graaf G, $n-1$lijnen heeft. We moeten bewijzen dat G een boom is, dus dat G geen circuits heeft.

Wel, veronderstel eens dat G één of meer circuits zou hebben. Verwijder nu uit een circuit een lijn, de overblijvende graaf blijft samenhangend. Herhaal dit proces net zo lang tot er geen circuits meer over zijn. Je houdt nu een circuitvrije samenhangende graaf G^- over met (nog steeds) n punten. G^- is dus een boom met n punten, maar met minder dan $n-1$ lijnen.

Dat is in tegenspraak met (⇒). □

Oefening 12

a. Teken alle (onderling niet-isomorfe) bomen met 5 punten.
b. Bestaat er een boom met valentierij 1 12 2 24?

Definitie F2 *opspannende boom, minimaal opspannende boom*

Zij G een samenhangende graaf. Een boom T heet een *opspannende boom* van G als T een deelgraaf is van G die álle punten van G bevat.

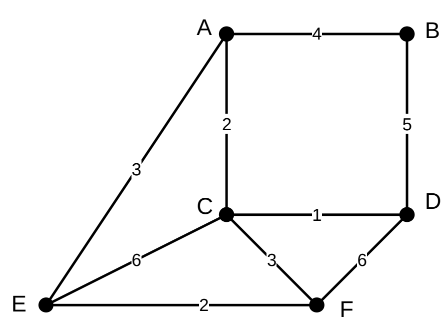
Zij G een samenhangende gewogen graaf.
Een *minimaal opspannende boom* van G is een opspannende boom van G met minimaal totaal gewicht.

Minimaal opspannende bomen kennen veel toepassingen. Daarbij gaat het telkens om situaties waar gezocht wordt naar een minimaal systeem van verbindingen in een netwerk. We bekijken een voorbeeld.

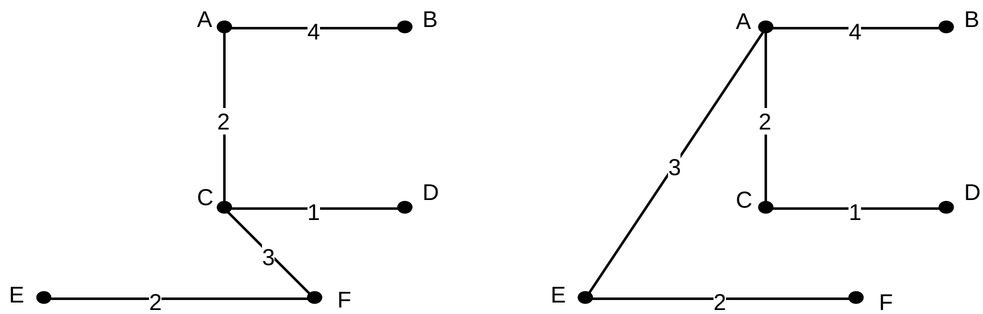
Voorbeeld: Goedkoopste buizennet

Op een fabrieksterrein wil men tussen zes depots A, B, C, D, E en F een buizennetwerk aanleggen voor het transport van goederen. Hierbij moet elk van de zes depots bereikbaar zijn vanuit elk van de andere depots (eventueel via tussengelegen depots), en zijn omwegen niet erg (het buizenvervoer is snel).

De situatie is hieronder in een graaf weergegeven. De depots zijn aangegeven door punten en de *mogelijke* verbindingen door lijnen. Niet élke verbinding is mogelijk (vanwege bijvoorbeeld tussenliggende gebouwen).



Uiteraard wil men de kosten van het aan te leggen buizennetwerk zo laag mogelijk houden. In de onderstaande gewogen graaf G zijn de kosten van de mogelijke verbindingen weergegeven door getallen (bv. in tienduizenden euro's) langs de betreffende lijnen. We zoeken dus een minimaal opspannende boom van G. Er blijken twee oplossing te zijn (€ 12.000):



de twee oplossingen

Constructie minimaal opspannende boom

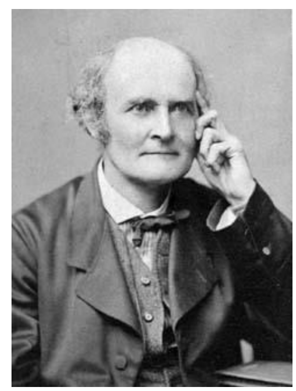
Hoe vinden we nu in het algemeen zo'n minimaal opspannende boom voor een samenhangende gewogen graaf G? De 'brute-force' aanpak

Vind alle opspannende bomen voor G en neem die met minimaal totaal gewicht

is voor een graaf met een klein aantal punten en lijnen (zoals in ons voorbeeld) nog wel werkbaar, maar met de toename van het aantal punten en lijnen wordt het probleem al snel veel te omvangrijk voor een dergelijk werkwijze:

Men kan namelijk bewijzen dat een gewogen volledige graaf K_n precies n^{n-2} opspannende bomen bezit (Cayley 1889). Voor de gewogen graaf K_5 betekent dit dus dat al 125 opspannende bomen moeten worden onderzocht!

Zeker voor wat omvangrijkere gevallen zou men graag de beschikking hebben over een algoritme dat een minimaal opspannende boom voor G levert. We vermelden er twee, het algoritme van Prim en het algoritme van Kruskal:



Arthur Cayley 1821-1895

Algoritme van Prim

Bouw een minimaal opspannende boom T als volgt stap voor stap op:
Laat T vooralsnog bestaan uit één enkel willekeurig punt. Voeg bij elke stap de lichtste lijn toe, die een punt binnen T met een punt buiten T verbindt. Als uiteindelijk alle punten van G zijn opgenomen in T stoppen we, en is T een minimaal opspannende boom van G geworden.

Algoritme van Kruskal

Bouw een minimaal opspannende boom T als volgt stap voor stap op:
Voeg bij elke stap de lichtste lijn toe, die geen circuit veroorzaakt. Als uiteindelijk $n-1$ lijnen van G zijn opgenomen in T stoppen we, en is T een minimaal opspannende boom van G geworden (hierbij is n het aantal punten van G).

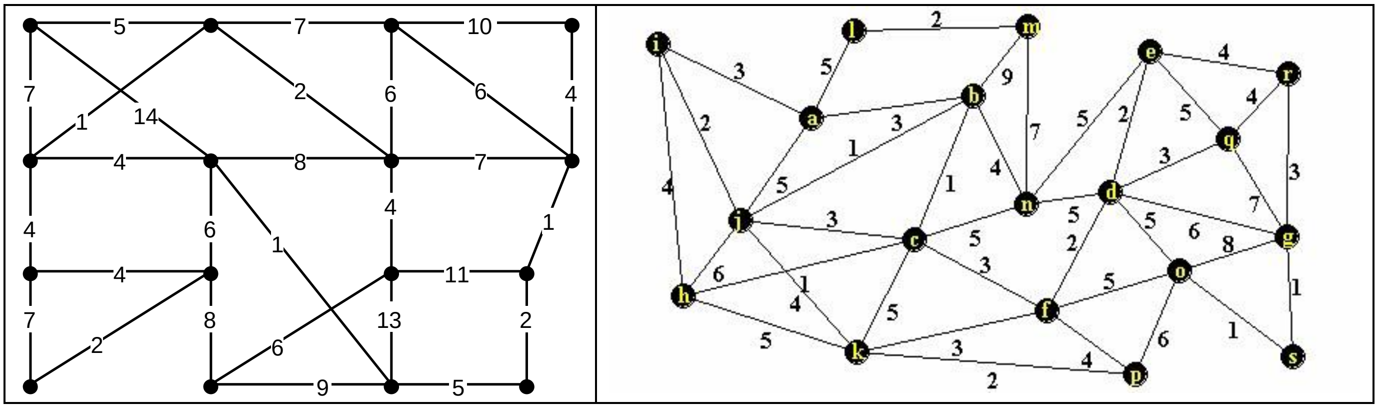
Joseph Bernard Kruskal. 1928

Oefening 13
Voer beide algoritmes eens uit op de graaf van ons buizennet. Hoe merk je in beide gevallen dat er twee oplossingen zijn?

Dat de algoritmes van Prim en Kruskal ook doen wat ze beweren te doen is niet zonder meer triviaal.
De zogenaamde *correctheidsbewijzen* laten we hier achterwege. Welk algoritme verdient de voorkeur? Het algoritme van Kruskal lijkt eenvoudiger in het gebruik, maar een nadeel is dat je steeds moet testen of een circuit is ontstaan, en voor grafen met veel punten en lijnen kan dit tijdrovend zijn.

Opgaven §F

F1 Bepaal met het algoritme van Prim of Kruskal van onderstaande graaf alle minimaal opspannende bomen en bereken het totaalgewicht.



F2 Er liggen acht kleine eilandjes in een meer, en de regering wil 7 bruggen bouwen om ze te verbinden, zodat ieder eiland bereikt kan worden vanuit ieder eiland via een of meer bruggen. De afstanden tussen ieder tweetal eilanden is gegeven in de tabel.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		24	21	34	28	20	35	12
2			27	18	22	18	19	16
3				26	12	35	44	20
4					16	33	30	23
5						36	40	17
6							18	21
7								31
8								

Welke bruggen moeten gebouwd worden om de kosten, die evenredig zijn met de totale lengte van de bruggen, te minimaliseren?

F3 Teken alle bomen met zes punten, die onderling niet-isomorf zijn, en waarin géén valentie voorkomt die groter is dan 3.

§H Kleuringen van grafen

In deze paragraaf onderzoeken we problemen die te maken hebben met het kleuren van de punten van een graaf. Dit leidt tot een discussie over het kleuren van staatkundige kaarten, waaronder het beroemde vier-kleuren probleem.

Definitie H1 *chromatisch getal van een graaf*

Zij G een enkelvoudige graaf.

Het chromatisch getal $\chi(G)$ van G is het minimum aantal kleuren, dat nodig is om de punten van G zó te kleuren dat buren een verschillende kleur krijgen.

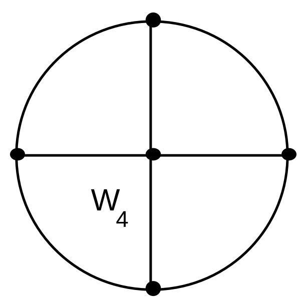
- De Griekse letter χ spreken we uit als "gi".
- Omdat $\chi(K_n)=n$, kunnen we een ondergrens voor $\chi(G)$ voor een willekeurige graaf G vinden door te zoeken naar de grootste volledige deelgraaf in G!

Oefening 14

Bepaal het chromatisch getal van de volgende grafen:

$K_{p\,q,}$ Octaëdergraaf Kubusgraaf Petersengraaf Wielgraaf W_k

Hierbij is de wielgraaf W_k een graaf in de vorm van een circuit van k punten met daarbinnen een punt dat is verbonden met alle punten op het circuit. Voorbeeld:



Het kleuren van landkaarten

In een atlas is het heel gebruikelijk om staatkundige kaarten zó te kleuren dat buurlanden een verschillende kleur krijgen. Dat maakt het mogelijk snel de verschillende landen te onderscheiden en de landsgrenzen te lokaliseren. Hoeveel kleuren zijn er voor een bepaalde kaart nodig? Je zou verwachten dat je meer kleuren nodig hebt naarmate de kaart groter en gecompliceerder wordt. Als je wat zou experimenteren met verschillende landkaarten zul je echter merken dat je steeds aan vier kleuren genoeg hebt. Je zou nu het volgende kunnen vermoeden:

Vier-kleuren-vermoeden (landkaarten-versie)
Iedere landkaart is in te kleuren met vier kleuren, zó dat buurlanden verschillend gekleurd worden (buurlanden moeten een grenslijn gemeen hebben).

Dit vermoeden werd halverwege de 19e eeuw geboren. Jarenlang probeerde men een bewijs te vinden, doch tevergeefs. En zolang er voor dit vermoeden geen waterdicht bewijs was, zou het nog best eens onwaar kunnen zijn. Er waren dan ook zowel mensen die geloofden in de juistheid van het vermoeden, als mensen die dachten dat er een tegenvoorbeeld te vinden moest zijn.

Pas in 1976 is dit vier-kleuren-probleem opgelost. Twee Amerikaanse wiskundigen, Appel en Haken vonden inderdaad een bewijs voor dit vermoeden, waarbij voor de laatste loodjes meer dan 1000 uur computertijd nodig was. Een leuk artikel over het vier-kleuren-probleem en haar historie vind je in het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras (nr. juni 2004).

Verband met grafen

Maar wat heeft dit nu alles te maken met grafen? Wel, een landkaart correspondeert met een graaf door landen als punten te tekenen, en twee punten te verbinden als het buurlanden betreft. Zo ontstaat altijd een enkelvoudige vlakke graaf! We kunnen nu het vier-kleuren-vermoeden vertalen naar grafen:

> **Vier-kleuren-vermoeden** (grafen-versie)
>
> Voor elke enkelvoudige vlakke graaf G is $\chi(G) \leq 4$.

Opgaven §H

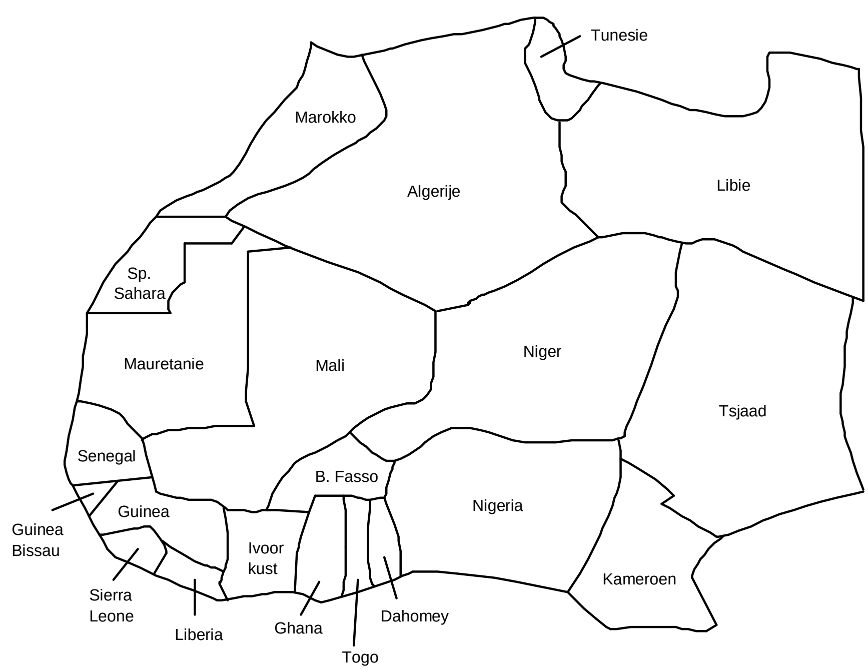
H1 Bereken het chromatisch getal voor de grafen in opgave E1

H2 We hebben opgemerkt dat voor een graaf G een ondergrens voor $\chi(G)$ kunnen vinden door te zoeken naar de grootste volledige deelgraaf K_n in G.

Kunnen we ook iets zeggen over een bovengrens voor $\chi(G)$. Jazeker! Toon aan dat een bovengrens gegeven wordt door [1 + maximale valentie].

H3 Hieronder zie je een grove staatkundige kaart van West Afrika. We weten dat er voor inkleuring maximaal vier kleuren nodig zijn. Maar zou deze speciale kaart misschien met slechts drie kleuren zijn te kleuren? Peter beweert van niet want hij zegt “nee hoor, want de bijbehorende graaf bevat een wielgraaf W_7 .

a. Waar zit deze wielgraaf W_7 in de kaart verborgen?
b. Waarom zijn dan zeker vier kleuren nodig?
c. Geef een kleuring van de kaart met vier kleuren.



H4

a. Teken (indien mogelijk) een regelmatige graaf G van de orde 3, met $\chi(G) = 2$.
b. Dezelfde vraag, maar dan met $\chi(G) = 3$.
c. Dezelfde vraag, maar dan met $\chi(G) = 4$.
d. Dezelfde vraag, maar dan met $\chi(G) = 5$.

H5 Een circusdirecteur reist met 11 dieren die vervoerd worden in een aantal wagens. Leeuwen en paarden verdragen elkaar niet, en moeten dus in verschillende wagens. En zo zijn er meer:

dier	*verdraagt de volgende dieren niet*
leeuw	paard, olifant, aap, kameel, cavia, beer, ezel, hond, parkiet
paard	leeuw, hond, beer
olifant	leeuw, beer, hond, parkiet
aap	leeuw, beer, parkiet
kameel	leeuw, beer
cavia	leeuw, beer, zeehond
beer	leeuw, aap, kameel, cavia, zeehond, ezel, hond, paard,
ezel	olifantleeuw, beer, hond
hond	leeuw, beer, olifant, ezel, paard
zeehond	beer, cavia
parkiet	leeuw, olifant, aap

De directeur wil zijn dieren in zo min mogelijk wagens vervoeren. Hoe kan de directeur zijn probleem grafentheoretisch oplossen?

H6 Een aantal leden van een internationaal misdaadsyndicaat wordt gearresteerd. Tot hun berechting zitten ze vast in een plaatselijke gevangenis met te weinig cellen. Men besluit meerdere personen in één cel toe te laten, maar dan wel zó dat ze elkaar niet kunnen verstaan.

Gevangene 1 spreekt Spaans en Engels. Gevangene 2 spreekt Spaans, Italiaans en Portugees. Gevangene 3 spreekt Engels, Frans en Portugees. Gevangene 4 spreekt Spaans, Engels, Frans en Duits. Gevangene 5 spreekt Frans en Portugees. Gevangene 6 en gevangene 7 spreken Duits en Italiaans.
Het probleem: Hoe kan men de gevangenen opsluiten in zo weinig mogelijk cellen?

Vertaal het probleem in grafentheorie en geef duidelijk aan hoe de door jou getekende graaf geïnterpreteerd moet worden. Formuleer het bijbehorende grafenprobleem nauwkeurig en los het op.