Uitwerkingen van de oefeningen

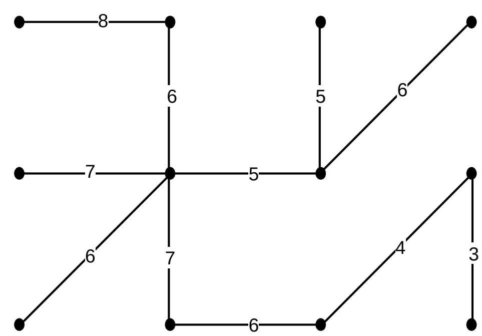
Oefening 1

a Het project duurt in elk geval 0+6+3+2=11 uur, en dat is juist het langste traject van start naar einde (een traject met een gewicht van minimale projectduur heet een kritiek pad.)

b De speling bij het leggen van de vloerbedekking is 11-(3+4)=4 uur.

Oefening 2

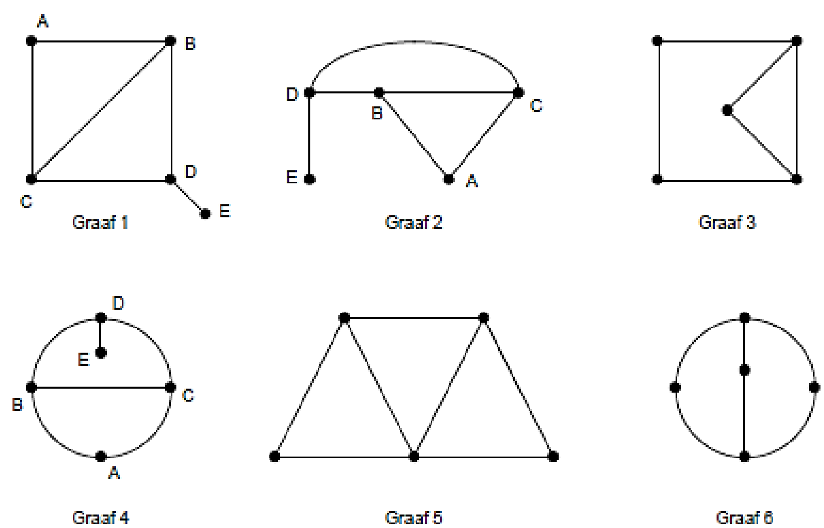
a Zo'n goedkoopste buizennet (€ 63000,=) is hieronder weergegeven (er is nóg een oplossing).



b Een correcte strategie zou bijvoorbeeld zijn (Er zijn meer correcte strategieën): Pak stapsgewijs de goedkoopste lijn uit de graaf zonder dat circuits ontstaan, totdat elke locatie vanuit elke andere locatie bereikbaar is.

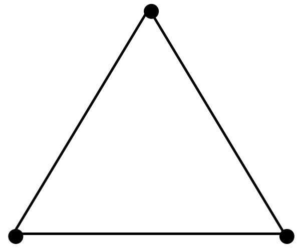
Oefening 3

- De grafen (1), (2) en (4) zijn isomorf (zie labeling).
- graaf (5) is niet isomorf met een van de andere, want deze heeft een lijn te veel.
- graaf (3) is niet isomorf met graaf (6), want graaf (3) heeft twee *buren* van valentie 2 en graaf (6) heeft die niet.
- graaf (3) en graaf (6) zijn niet isomorf met graaf (1), want de grafen (3) en (6) hebben geen eindpunt, en graaf (1) wel.

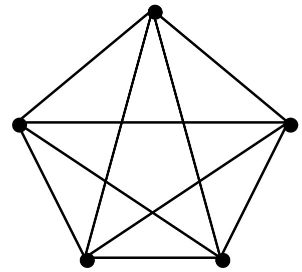


Oefening 4

a. Hieronder zijn de gevraagde grafen getekend



de graaf K_3



de graaf K_5

b. Een graaf K_n heeft n punten. Elk van deze n punten is verbonden met alle overige $n-1$ punten. Een graaf K_n is daarom regelmatig van de orde $n-1$. De som van de valenties van K_n is dus $m = n(n-1)$.

c. De valentiesom is 2m (handenschud-lemma), dus uit (b) volgt dat $m = ½n(n-1)$.(Er zijn nog meer manieren om dit in te zien!)

Oefening 5

Er zijn 5 oplossingen, steeds verticaal weergegeven:

A	4	5	5	5	5
B	1	1	1	1	1
C	3	3	3	4	2
D	2	4	2	2	4

Oefening 6

$K_{p\,q,}$ heeft $p+q$ punten en $p*q$ lijnen.

Oefening 7

a. Elk punt van deze samenhangende graaf G heeft even valentie, dus G een Eulergraaf.

b. stap1 Een startcircuit was al gegeven: α=GEABDG.

stap 2 Het circuit α bevat nog niet alle lijnen van G, dus verwijderen we de lijnen van α uit G (en ook het punt G dat geïsoleerd raakt) en zo ontstaat de graaf G^*. Bepaal vanuit bijvoorbeeld het punt E van α een circuit in G^*, bijvoorbeeld β=EBCDE. Voeg nu het circuit β op de plaats van punt E in bij het circuit α, dan ontstaat het circuit α^* =GEBCDEABDG.

stap 3 Het circuit α^* bevat nog steeds niet alle lijnen van G, dus verwijderen we de lijnen van α^* uit G^* en zo ontstaat de graaf G^{**} (zie tekening). Bepaal vanuit bijvoorbeeld het punt C van α^* een circuit γ=CADFC in G^{**}.

Voeg het circuit γ weer op de plaats van punt C in bij het circuit α^*, dan ontstaat het circuit α^{**}=GEBCADFCDEABDG.

stap 4 Nu bevat het circuit α^{**} alle lijnen van G, en dus is α^{**} een Eulercircuit.

Oefening 8

Hier zijn 6 punten van oneven valentie, dus zijn 3 pennestreken nodig.

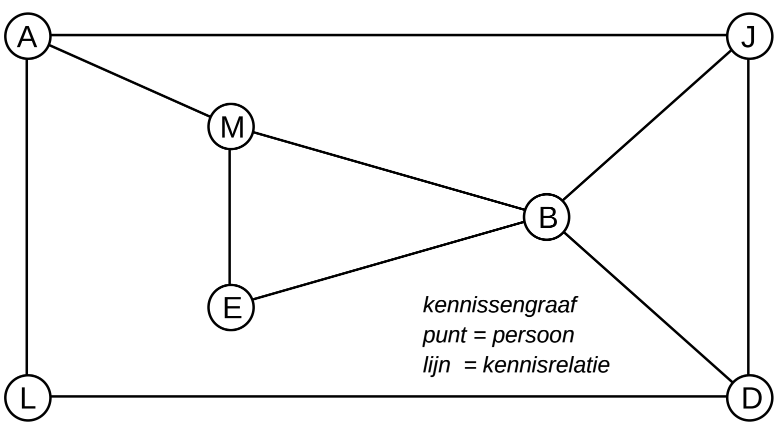
Oefening 9

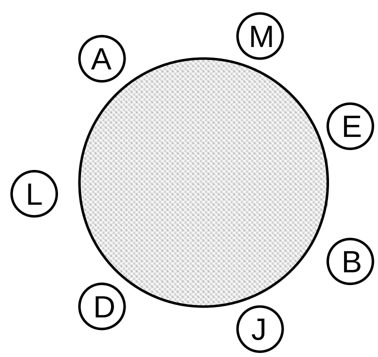
Er zijn vier punten van oneven valentie. Deze vier punten kunnen we op drie manieren in twee paren koppelen. Vervolgens verbinden we in elk van de drie gevallen de twee koppels via een extra kortste pad.

Koppels	*Kortste paden*	*Totale lengte*
AB en CD	AB en CED	6 + 3 = 9
AC en BD	ADEC en BED	6 + 4 = 10
AD en BC	AD en BEC	3 + 5 = 8

Met deze extra paden kan de postbode een Eulercircuit wandelen waarbij hij dus 8 eenheden extra loopt (paden AD en BEC worden “verdubbeld”).

Oefening 10





grafenprobleem: is er in deze kennissengraaf een rondwandeling grafenoplossing terugvertaald die precies één keer langs alle punten voert?

Direct is aan de graaf te zien dat er slechts één oplossing is, namelijk AMEBJDLA

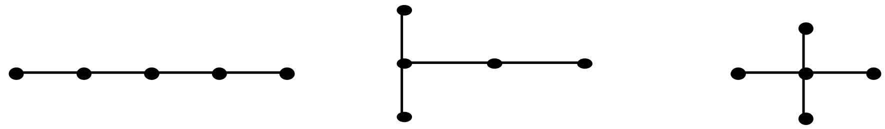
Oefening 11

a. Alleen (a) en (b) zijn bomen. De derde (c) is geen boom want niet samenhangend en de laatste twee (d) en (e) zijn geen boom omdat ze een circuit bevatten.

b. Het aantal lijnen van een boom is 1 minder dan het aantal punten, dus $m = n-1$.

Oefening 12

a. Er bestaan (tot op isomorfie) drie bomen met 5 punten:



b. Er zijn 6 punten, dus moeten er 5 lijnen zijn. Maar aan de andere kant is de valentiesom gelijk aan 12, dus zouden er 6 lijnen moeten zijn (in elke graaf is de valentiesom gelijk aan 2m). Tegenspraak. Conclusie: een dergelijke boom bestaat dus niet.

Oefening 13

Bij de uitvoering van beide algoritmen heb je op een bepaald moment een keus om óf CF óf AE op te nemen (waarna de andere niet meer aan de beurt komt).

Oefening 14

$\chi(K_{p,q}) = 2$

χ (Octaëdergraaf) = 3

χ (Kubusgraaf) = 2

χ (Petersengraaf) = 3

$\chi(W_k) = 3$ als k even is en $\chi(W_k) = 4$ als k oneven is.