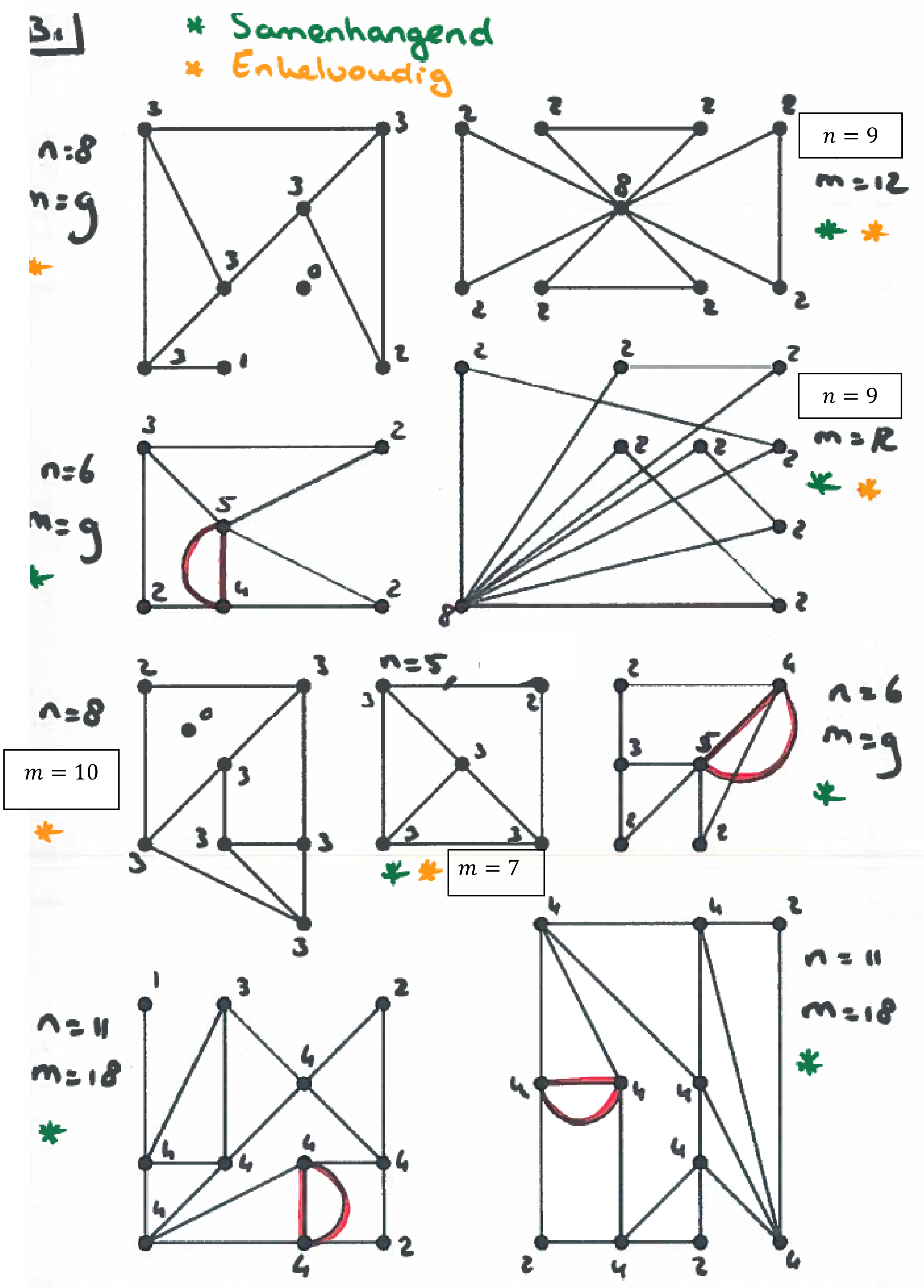
Uitwerkingen van de opgaven

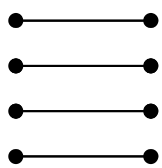


B2 Stel eens dat er een graaf zou bestaan met een oneven aantal punten van oneven valentie. In de valentie-rij van die graaf zou dan een oneven aantal oneven getallen staan. Het gevolg is dat de valentie-som oneven is. Dat is echter onmogelijk (volgens Stelling B1).

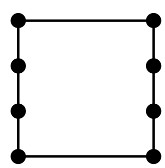
B3 Zie onderstaande tabel en de verwijzingen:

valentierij	Bestaat enkelvoudige graaf met deze valentierij?	Bestaat een enkelvoudige samenhangende graaf met deze valentierij?
a	Ja (1)	Nee (2)
b	Ja	Ja (3)
c	Ja (4)	Nee (5)
d	Nee (6)	Nee
e	Nee (7)	Nee
f	Nee (8)	Nee

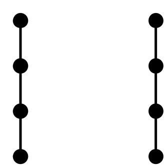
(ad 1)



(ad 3)



(ad 4)



(ad 2) Zij n het aantal punten. Voor een enkelvoudige samenhangende graaf kan je bewijzen dat het minimum aantal lijnen $n - 1$ is (zie B5a). Het is duidelijk dat graaf (a) hierop faalt.

(ad 5) zie (ad 2).

(ad 6) Er is één punt P met valentie 8. Daar er slechts 8 punten zijn zou vanuit P óf een lus óf een meervoudige lijn moeten vertrekken. Dat is echter in tegenspraak met de enkelvoudigheid.

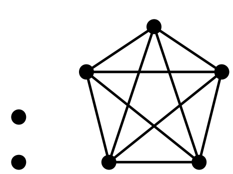
(ad 7) Er is één punt P met valentie 7. Nu is P natuurlijk niet verbonden met het geïsoleerde punt, dus zou vanuit P óf een lus óf een meervoudige lijn moeten vertrekken. Dat is in tegenspraak met de enkelvoudigheid.

(ad 8) De valentie-som is hier oneven, en dat kan niet.

B4

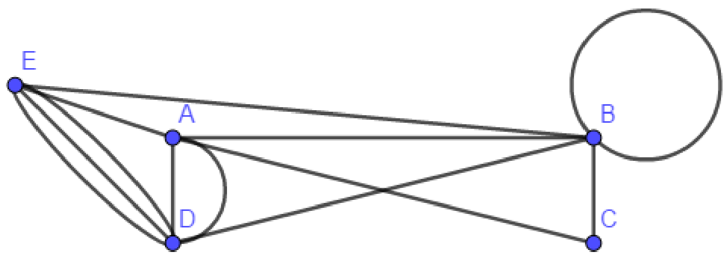
a. Het minimum aantal lijnen is $n - 1$ (er zijn geen circuits, zie later § F).

b. Het maximum aantal lijnen is 10:



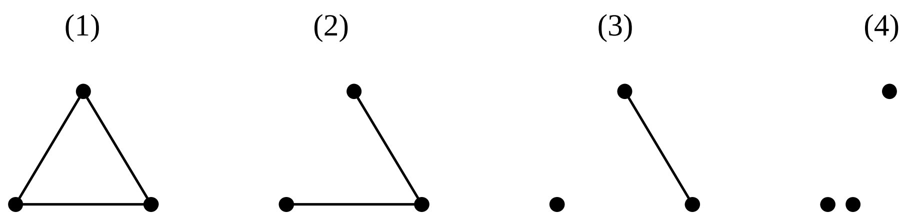
B6

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

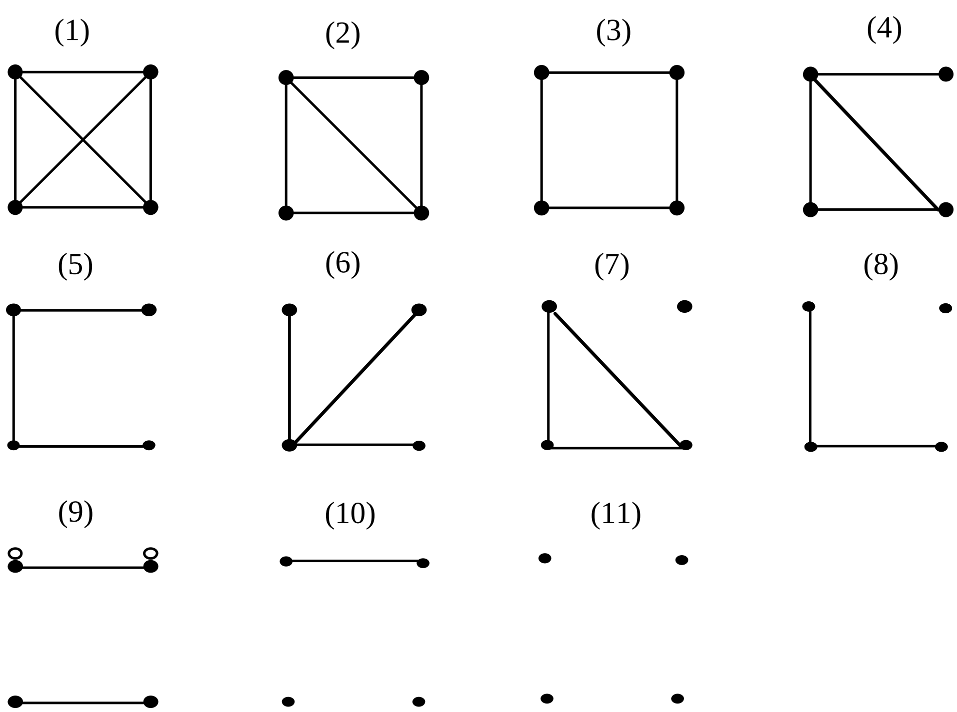


b.

B7 a

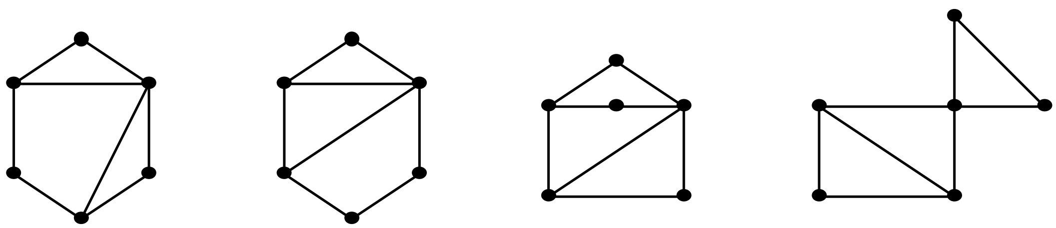


b Er bestaan (tot op isomorfie na) precies elf enkelvoudige grafen met 4 punten:



B8 Er blijken vier verschillende grafen te bestaan met valentie-rij 2, 2, 2, 3, 3, 4.

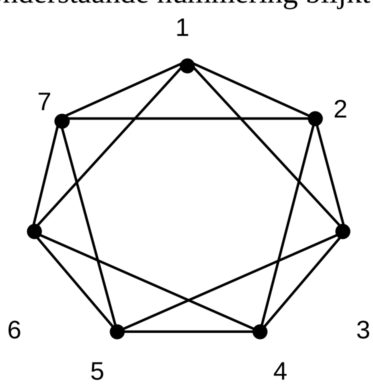
(1) (2) (3) (4)

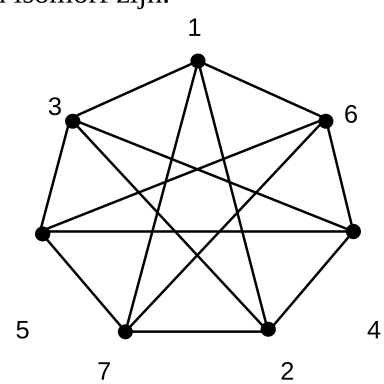


B9 a en c Dat is een direct gevolg van definitie B3.

b en d Nee, grafen (3) en (6) van oefening 4 zijn een tegenvoorbeeld.

B10 a Uit onderstaande nummering blijkt dat de grafen isomorf zijn.





b Nee, de grafen zijn niet isomorf. Dat is op verschillende manieren in te zien:
Bijvoorbeeld: de rechtergraaf heeft twee buren met valentie 2, de linker niet.

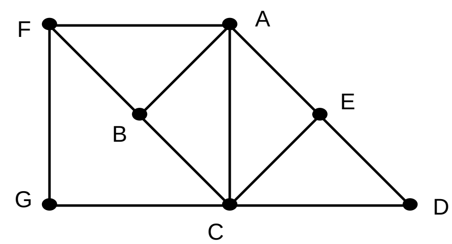
B12
Een noodzakelijke voorwaarde voor isomorfie is een gelijke valentie-rij. Hieronder zie je de valentierijen van de grafen.:

01233333		**222222228**
222345		**222222228**
02333333	23333	**222345**
12234444444		22244444444

De de grafen die horen bij de twee rode valentie-rijen zijn wellicht isomorf.
Net zo voor de groene.
De verbindingsmatrices van deze grafen zijn inderdaad gelijk. Van beide grafen staat er hieronder één verbindingsmatrix.

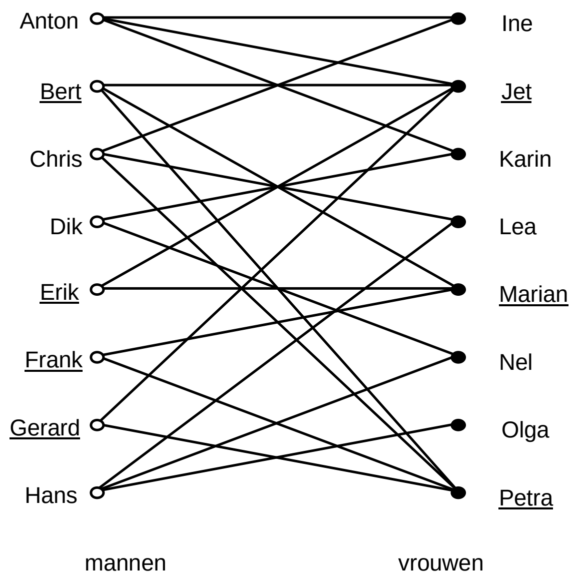
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C1 a stap1)



stap2 en stap 3) Er zijn verschillende mogelijke stelsels volledige deelgrafen, bijvoorbeeld:
stelsel 1: ABF, ABC, ACE, CDE, CG
stelsel 2: ABF, ABC, CDE, CG

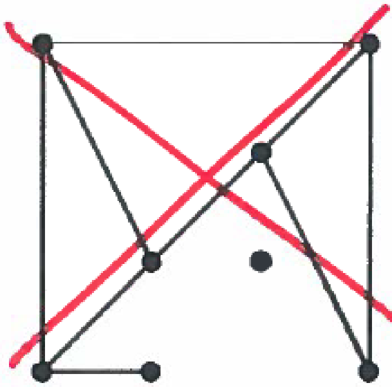
C2 a Maak een tweedelige graaf met witte punten (jongens) en zwarte punten (meisjes), waarbij wederzijdse voorkeur met een lijn wordt aangegeven.

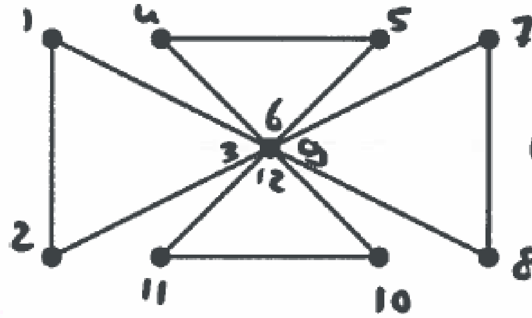


b Als we onze aandacht even beperkt richten op Bert, Erik, Frank en Gerard, dan zien we dat deze vier jongens niet gekoppeld kunnen worden. Er zijn immers maar drie meisjes (Jet, Marian en Petra) koppelbaar voor hen. Maar dan is de gehele groep jongens (en natuurlijk ook meisjes) zéker niet te koppelen.

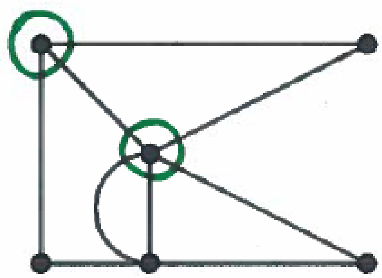
D.1

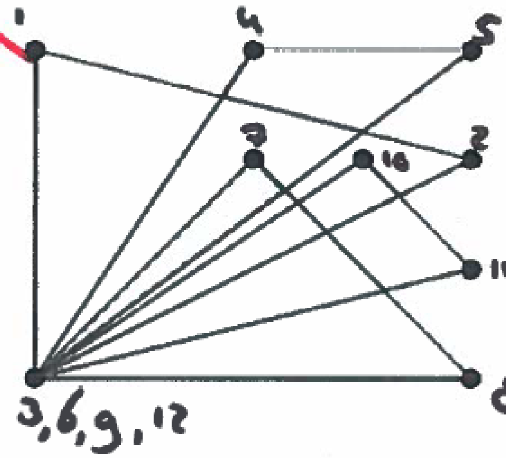
X : niet samenhangend -> niet Euler
O : punten met oneven valentie -> niet Euler



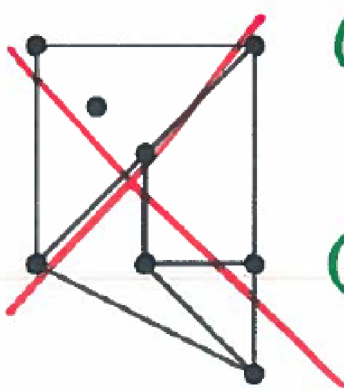


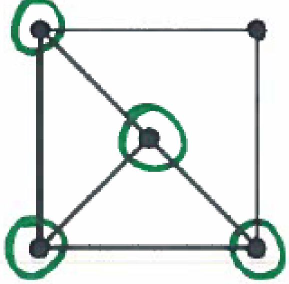
Euler

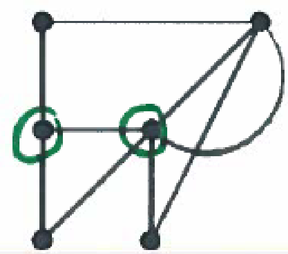


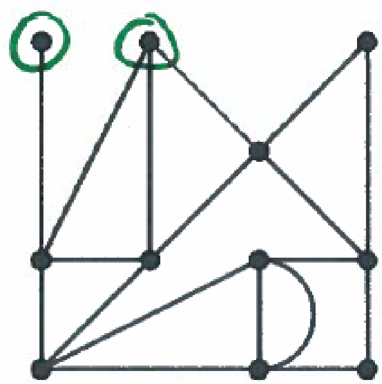


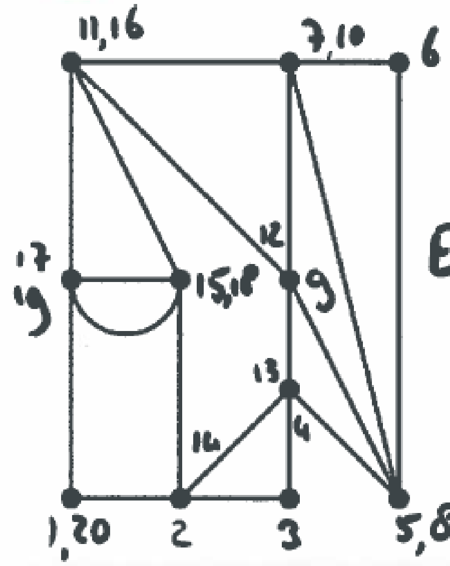
Euler











Euler

D2 De Köningsberg-graaf heeft vier punten van oneven valentie, dus er zijn twee extra lijnen nodig om er een Eulergraaf van te maken, bijvoorbeeld AB en CD.

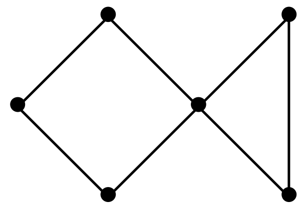
D3

a. K_n is regelmatig van de orde $n-1$, dus geldt: K_n is een Eulergraaf $\Leftrightarrow$ n is oneven

b. $K_{p\,q,}$ is een Eulergraaf $\Leftrightarrow$ p en q beide even

$K_{p\,q,}$ is een semi-Eulergraaf $\Leftrightarrow$ ofwel p=2 en q oneven (of andersom), ofwel p=q=1

D4 Een Eulergraaf met 6 punten en 7 lijnen.



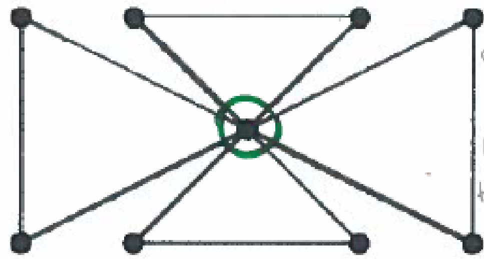
D5

a. Er zijn 27+101=128 punten met oneven valentie, dus is het minimum aantal ononderbroken pennestreken gelijk aan 64.

b. Er zijn 12 punten van oneven valentie, dus zijn minstens 6 pennestreken nodig.

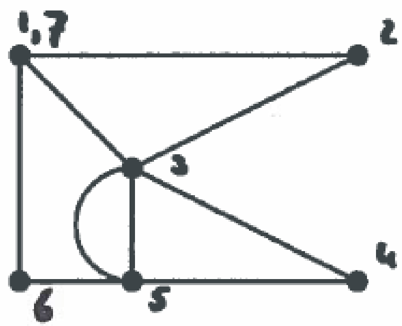
E1

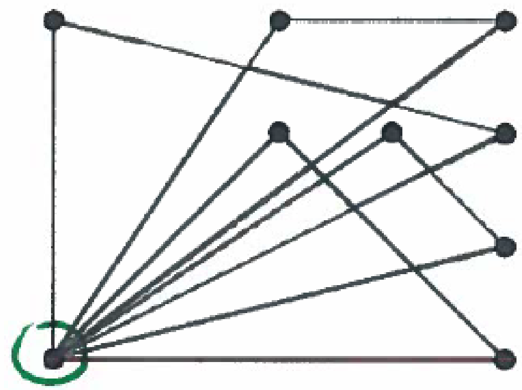
X: niet samenhangend → niet Hamilton



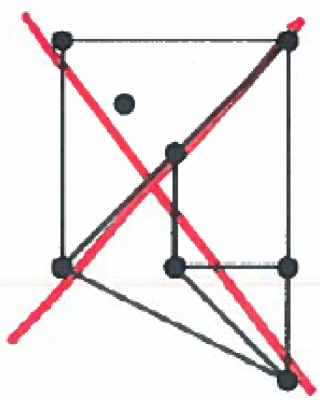
Niet Hamilto
Je moet steeds
langs het midde
punt om over
te steken

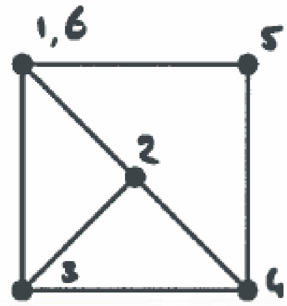
lam.



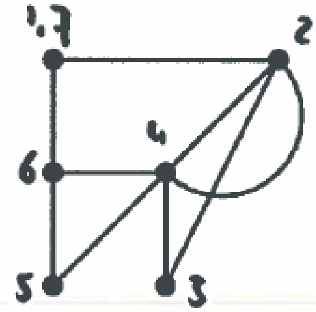


Zie



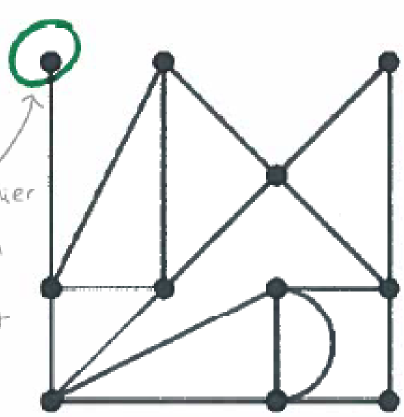


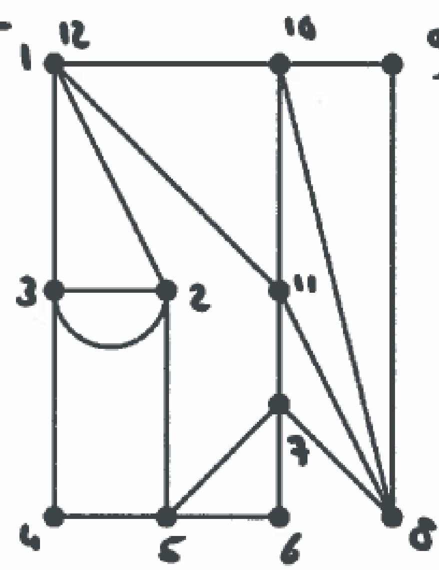
Ham.



Ham.

Jiet
lamiton:
Je kan hier
iet heen
n terug





Ham.

E2

a. $K_{2,4}$ is een Eulergraaf, maar geen Hamiltongraaf.
b. De tetraëdergraaf is geen Eulergraaf, maar wel een Hamiltongraaf.
c. K_2 is noch een Eulergraaf noch een Hamiltongraaf.
d. K_3 is zowel een Eulergraaf als een Hamiltongraaf.

E4

a. K_1 en K_2 zijn uiteraard geen Hamiltongrafen.

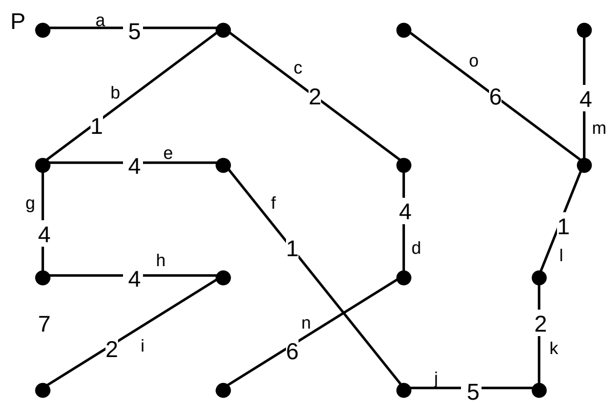
Elke K_n (met $n \geq 3$) is een Hamiltongraaf. Vanuit elk punt kun je immers naar elk ander punt je circuit verlengen, tot je 'rond' bent.

b. Als $p \neq q$, dan is $K_{p\,q}$, vanwege opgave E3a geen Hamiltongraaf.

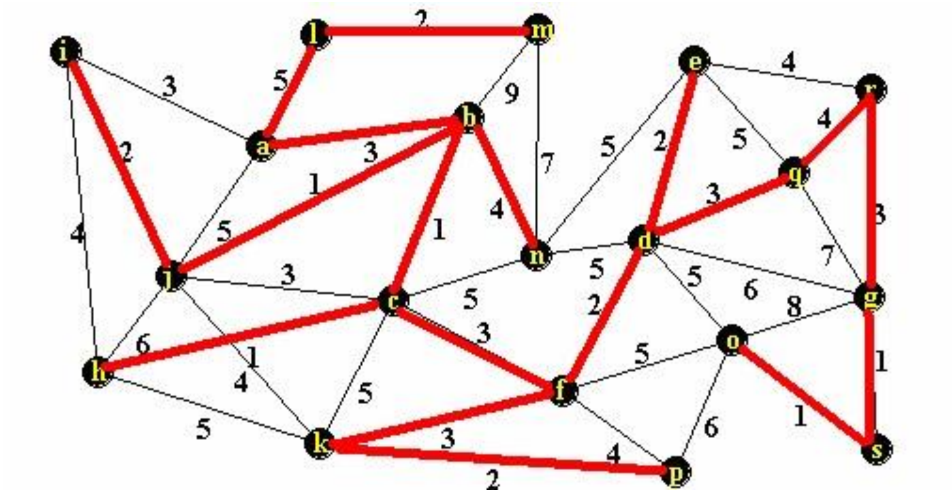
Als $p = q \geq 2$ dan is $K_{p\,q}$, een Hamiltongraaf. Dat is eenvoudig te zien door in de standaard weergave van zo'n graaf een 'zaagtand-pad' te maken en in de laatste stap terug te gaan naar je startpunt. Blijft over de graaf $K_{1,1}$. Dat is natuurlijk geen Hamiltongraaf.

F1 a We zijn het algoritme van Prim begonnen met punt P, en de lijnen zijn toegevoegd in de volgorde a, b, c, etc. Het gewicht van de minimaal opspannende boom is 51.

Er is nóg een minimaal opspannende boom! In de laatste Prim-stap kan namelijk, in plaats van lijn o, ook zijn buurlijn van gewicht 6 worden toegevoegd.

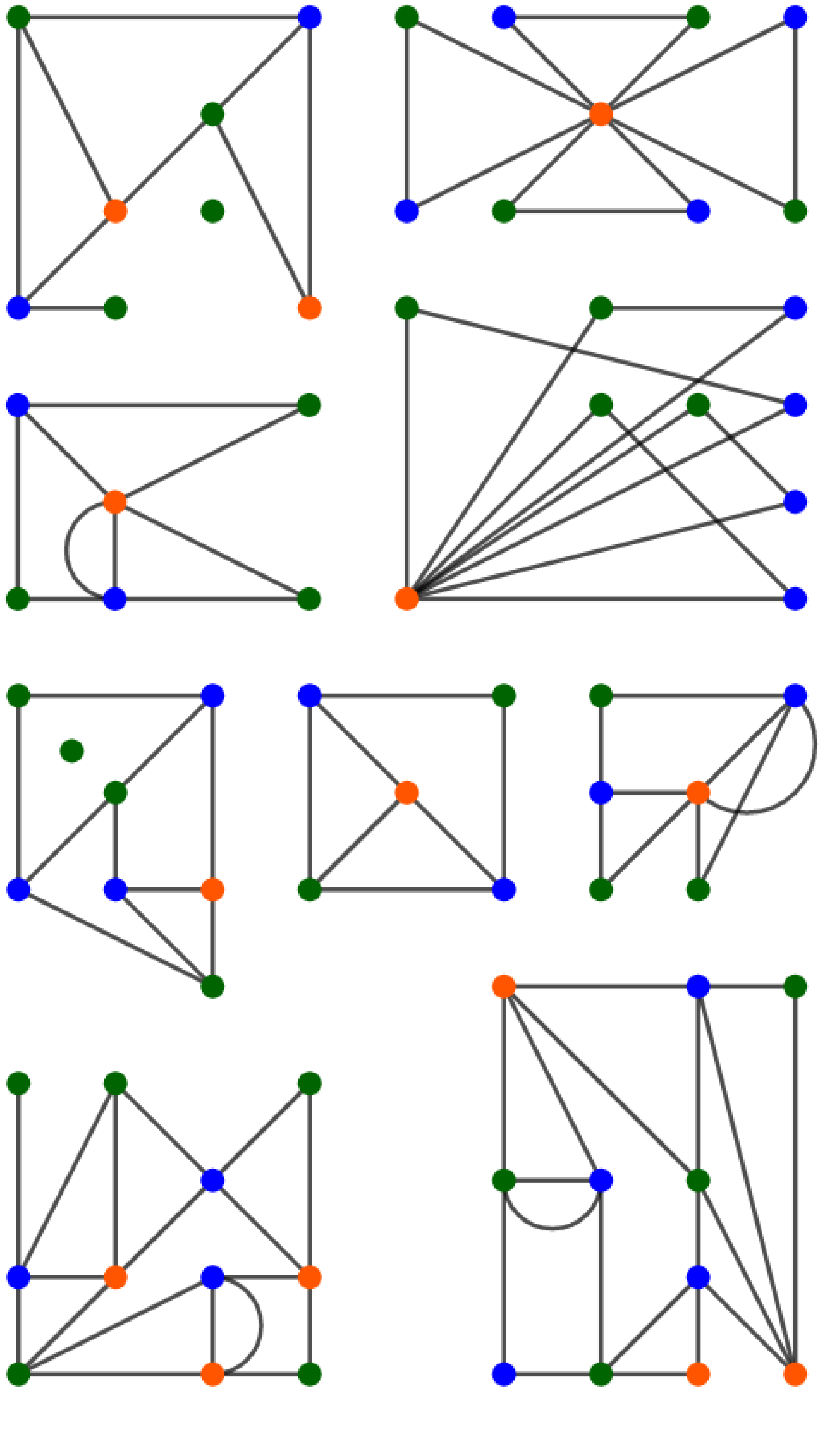


b Het minimum bedraagt 43.



F2 Lengte minimaal netwerk is 109 km. Verbind eiland 1 met eiland 8, eiland 2 met eiland 6 en met eiland 8, eiland 3 met eiland 5, eiland 4 met eiland 5, eiland 5 met eiland 8 en eiland 6 met eiland 7.

H1



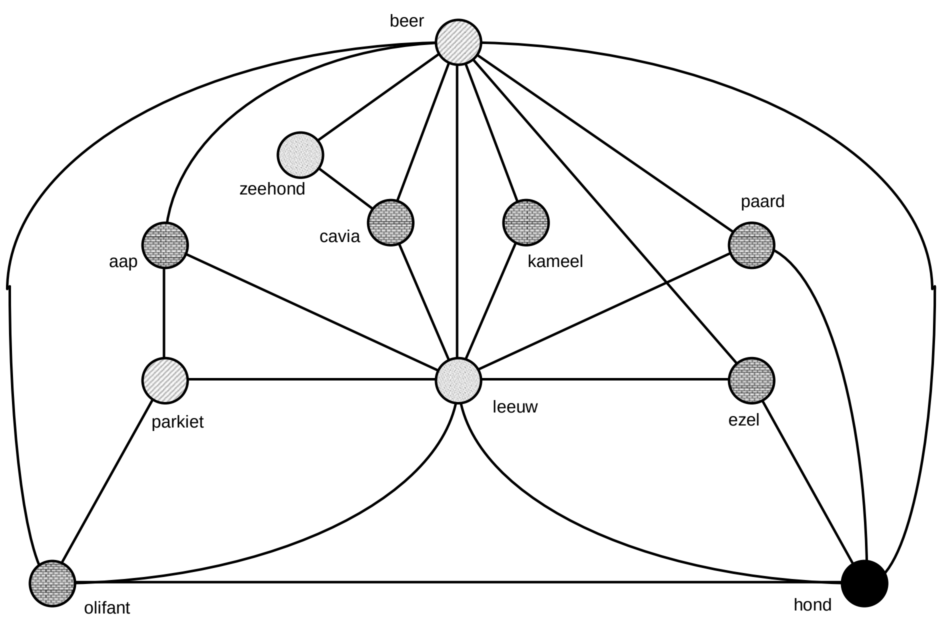
H3

a. Neem Bourkina Fasso (of Mali) als centrum en de omringende landen als punten op het wiel dan geeft dit een deelgraaf W_7.
b. Voor W_7 zijn al vier kleuren nodig. Aangezien vier kleuren ook voldoende zijn (vierkleuren-stelling) heb je voor deze kaart dus precies vier kleuren nodig.
c. Meerdere oplossingen mogelijk. Tip: begin met "W_7" te kleuren.

H4

a. $K_{3,3}$.
b. Petersen-graaf.
Aan het einde van de 19e eeuw bestond het vermoeden dat elke regelmatige graaf van de orde 3 met tevens chromatisch getal 3 automatisch een Hamilton-graaf moest zijn. In 1890 is dit vermoeden weerlegd met deze Petersen-graaf door ...... Petersen.
c. K_4.
d. Zo'n graaf bestaat niet. Immers de maximale valentie is 3, en volgens opgave H1 is dan $\chi(G) \leq 4$.

H5 Maak een graaf G, waarbij punten corresponderen met diersoorten en lijnen de relatie 'elkaar niet verdragen' weergeven.



Het gevraagde minimum aantal benodigde wagens is nu juist gelijk aan $\chi(G)$, en deze blijkt 4 te zijn (De beer, paard, hond en leeuw vormen K_4).
Een wagenindeling, behorende bij deze 4-kleuring is dus:

Geblokte wagen	: paard, olifant, aap, kameel, cavia, ezel
Gestippelde wagen	: leeuw, zeehond
Gestreepte wagen	: beer, parkiet
Zwarte wagen	: hond

H6 Maak een graaf G, waarbij punten corresponderen met gevangenen en lijnen de relatie 'elkaar verstaan' weergeven. Gevangenen 1, 2, 3 en 4 vormen samen K_4, dus er zijn vier cellen (vier kleuren) nodig.