Wiskunde D Online
Blok: Geschiedenis van wiskunde

Rogier Bos

Versie januari 2020

Inhoudsopgave

Introductie

In dit blok staat de geschiedenis van de wiskunde centraal. We kunnen daar onmogelijk een overzicht van geven in zo'n korte tijd, dus bekijken we simpelweg een aantal snapshots. De rode draad daarbij is de notie van getal. Het belangrijkste inzicht dat je daarbij ontwikkelt is dat zelfs zo'n fundamenteel begrip niet iets statisch is: wat onder een getal wordt verstaan is langzaam opgerekt gedurende geschiedenis. Dit is exemplarisch voor wat er vaak gebeurt in de wiskunde: ideeën wordt abstracter gemaakt, aangepast, op creatieve wijze om steeds weer nieuwe en geavanceerdere doeleinden te dienen. In die zin is dit inkijkje in geschiedenis ook een inkijkje in het hart van de wiskunde als levend vak in ontwikkeling.

Hoofdstuk 1

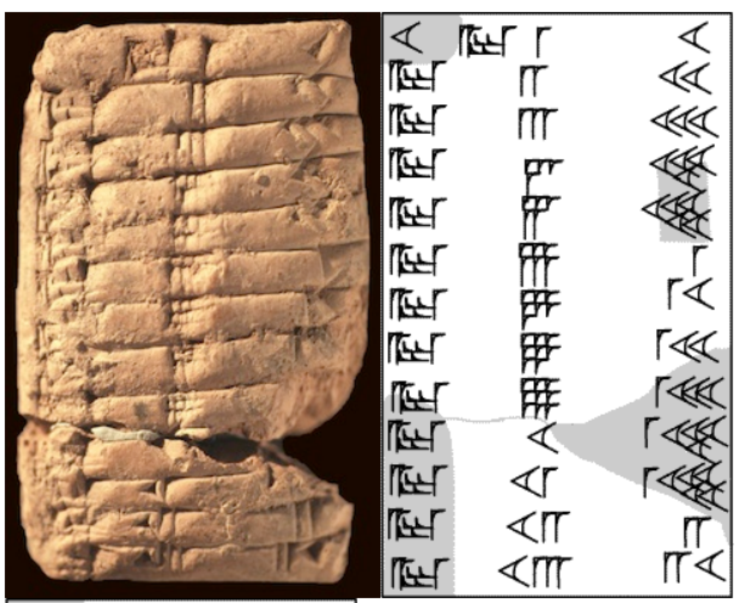
Babyloniё ±2500 BCE: kleitabletten

1.1 Babyloniërs en hun wiskunde

Als we het over Babyloniërs hebben dan verwijzen we naar een beschavingscultuur van ongeveer 2500 BCE tot 500 BCE, een enorme tijdspanne. Het gaat om volkeren gevestigd in het stromingsgebied van de Eufraat en de Tigris in het huidige Syrië, Irak en Iran. De Babyloniërs schreven in spijkerschrift, een schrift waarin ze ook aanduidingen hadden voor getallen. Als schrijfmateriaal gebruikten zij kleitabletten die na het schrijven gebakken werden, als wat geschreven was bewaard moest blijven. En veel van die gebakken kleitabletten zijn zeer lang bewaard gebleven en nu voor ons nog steeds te lezen.

1.2 Getalstelsels

Hieronder zie je het kleitablet VAT7858 uit de collectie van het Vorderasiatisches Museum, Berlijn. Ernaast staat een interpretatie die beter leesbaar is.

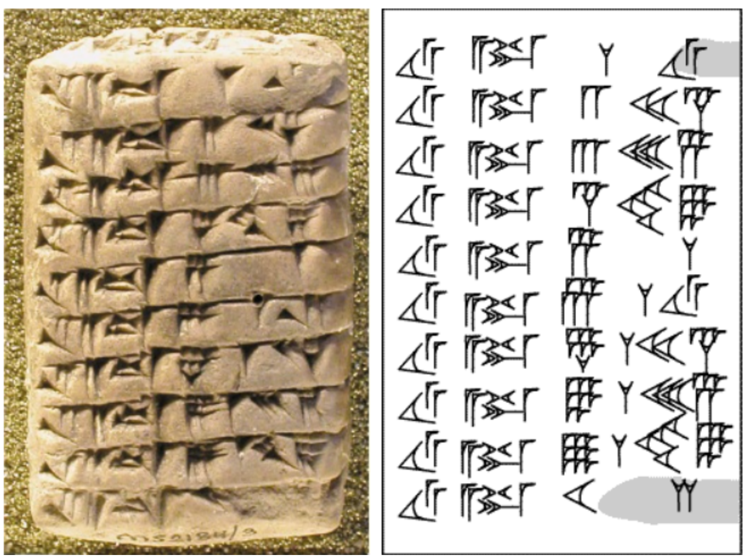


Het symbool dat eruit ziet als een A op zijn kant staat voor ”10”.

Opgave 1.1. *Vertaal op basis hiervan alle tekst op het tablet.*

Zoals je vermoedelijk gezien hebt is dit een tafel van vermenigvuldiging en wel van het getal tien. Bij zes keer tien gebeurt iets bijzonders: er staat weer het teken voor één. De reden hiervoor is dat Babyloniërs, net als wij een positiestelsel hadden. Het verschil is dat ze geen teken voor de nul hadden, dus uit de context moet je hier opmaken dat het niet om het getal 1 gaat, maar om het getal 60. En daarbij komen we bij een tweede onderscheid met ons eigen getalstelsel: bij de Babyloniërs was dit op basis van het getal 60. Je ziet rechtsonder hoe het getal 130 geschreven staat. Als $2 \cdot 60 + 1 \cdot 10$. Dat komt niet toevallig overeen met hoe we tijdsrekening doen: 130 minuten komt overeen met twee uur en 10 minuten. De positie van de 1-symbolen en 10-symbolen bepalen dus het uiteindelijke getal.

Hieronder zie je nog een tabel van een tafel (tablet MS2184/3 in the Schyen collectie, foto door Jöran Friberg)



Opgave 1.2. *Vertaal deze tabel.*

Je ziet hier dat een losse één net iets anders dan enen naast elkaar wordt geschreven.

Geïnspireerd door tijdsnotatie noteren we Babylonische getallen voor het gemak met de dubbele punt, dus $4 : 23$ voor $4 \cdot 60 + 23 = 263$.

Opgave 1.3. *Bereken. Schrijf je antwoord in “:”-notatie.*

(a) $12 : 12 + 12 : 12$

(b) $14 : 35 + 32 : 42$

(c) $17 \cdot 34$

De Babyloniërs zetten dit consequent door tot 59:59. Wat daarna komt laat zich raden, 1:0:0. Waar bij ons 123 staat voor $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, staat bij de Babyloniërs $1 : 2 : 3$ voor $1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0$.

Opgave 1.4. *Schrijf in 60-tallige notatie*

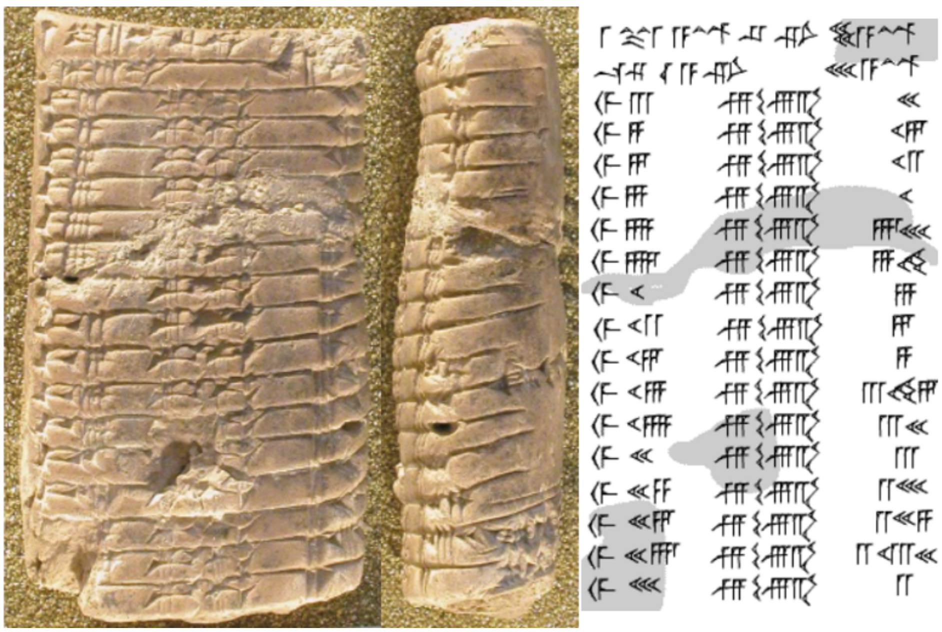
(a) 12345

(b) 123456

(c) 1234567

Opgave 1.5. *In ons 10-tallig stelsel geldt dat een getal deelbaar is door 3 alleen als de som van de cijfer deelbaar is 3. Bijvoorbeeld, 471 is deelbaar door drie, want* $4 + 7 + 1 = 12$ *is deelbaar door 3. Geldt dit ook voor het 60-tallig stelsel van de Babyloniërs?*

Voor onderdeel (c) van Opgave 1.4 moet je in feite bedenken hoe het stelsel in het algemeen werkt. Dat Babyloniërs met grote getallen konden werken met behulp van hun positiestelsel is indrukwekkend. Maar het wordt nog indrukwekkender. De Babyloniërs gebruikten hun positiestelsel namelijk op een manier dat wij dat ook doen. Zie het volgende tablet (MS3874 uit de Schoyen collectie).



Op de derde regel staat "De inverse van 3 is 20".

Opgave 1.6. *Wat staat er op de volgende vijf regels?*

Je zou de getallen in de rechterkolom als machten van 60 kunnen zien, maar er zijn genoeg aanwijzingen (zie ook de volgende paragraaf) dat hier echt de inverse van 3 als **komma-getal** bedoeld wordt, dus $\frac{1}{3} = 0,20 = 20 \cdot 60^{-1}$. Net als wij gebruikten de Babyloniërs hun positiesysteem om ook na de komma door te gaan met decimalen, maar dan dus "sexagesimalen". Dus een Babylonisch getal met een komma $12 : 3,40 : 23$ staat voor het getal $12 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0 + 40 \cdot 60^{-1} + 23 \cdot 60^{-2}$.

Opgave 1.7. *(a) Schrijf* $0,23 : 42$ *als decimaal getal*

(b) Schrijf $\frac{3}{4}$ *als sexagesimaal getal*

(c) Schrijf $\frac{1}{25}$ *als sexagesimaal getal. Dit is nogal gepuzzel; hint: het antwoord staat op bovenstaand tablet.*

Gepuzzel is het niet alleen voor ons, maar was ook voor de Babyloniërs. Vandaar dat dit kleitablet gebakken werd en als hulpmiddel bij het rekenen werd ingezet.

1.3 Kleitablet YBC7289

Het kleitablet hieronder is erg beroemd. Het is de YBC7289, uit de Yale Babelonian collectie. Er staat een vierkant op en linksboven langs de zijde staat het getal 30. Bij de diagonaal staan twee getallen onder elkaar: 1,24:51:10 en 42,25:35.

Opgave 1.8. *(a) Ga na dat* $30 \cdot 1, 24 : 51 : 10 = 42, 25 : 35$

(b) Bereken de lengte van de diagonaal en vergelijk deze met de benadering op het tablet

(c) Leg uit waarom $1, 24 : 51 : 10$ *dus een benadering van* $\sqrt{2}$ *is*

(d) Tot op welke decimaal klopt deze benadering?

Het is opmerkelijk te noemen dat de Babyloniërs 3700 jaar geleden zo'n precieze benadering van $\sqrt{2}$ hebben berekend. Het is niet met zekerheid te stellen hoe ze dat deden. Hieronder bespreken we een rekenmethode die ze misschien gebruikten.

Opgave 1.9. *Bekijk de functie* $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. *Dan maak je een rij getallen*

$$x_0 = 1, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \ldots$$

Bereken x_1, x_2, x_3, x_4

Je ziet dat deze methode al heel gauw meer correcte decimalen geeft dan op dit tablet. De reden is dat

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right)$$

problemen geeft, en dan in het bijzonder de $\frac{24}{17}$. Die breuk heeft een repeterend stuk van acht sexagesimalen. Mogelijk hebben de schrijvers van het tablet hier een benadering van de breuk $\frac{24}{17}$ als $1, 24 : 42 : 21$ gebruikt, en daarna naar beneden afgerond (in hexagesimalen).

Opgave 1.10. *Reken dat na door de laatste stap met deze benadering te doen.*

De laatste opgave van dit hoofdstuk is een algebraïsche afleiding van de methode hierboven.

Opgave 1.11. *Stel p is het getal waarvan je de wortel wilt weten. Je begint met een gokje x_0. Als je niets beters weet (of een computer bent) bijvoorbeeld de helft van p. Hoe fout is dat? We schrijven e (van error) voor de fout*

$$e = \sqrt{p} - x_0.$$

(a) Ga na dat $p = (e + x_0)^2$.

(b) Ga na dat $e = \frac{p - x_0^2}{2x_0 + e}$.

Als we ervan uitgaan dat de fout niet te groot is ten opzichte van x_0 dan volgt hieruit dat

$$e \approx \frac{p - x_0^2}{2x_0}.$$

Daaruit kunnen we concluderen dat

$$x_1 = x_0 + \frac{p - x_0^2}{2x_0}$$

een betere benadering is.

(c) Ga na dat

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x_0} + x_0\right)$$

(d) Neem $p = 2$ en $x_0 = 1$. Bereken x_1.

Nu kun je x_1 als je startpunt nemen en gebruiken om een weer iets betere benadering te vinden met dezelfde formule

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x_1} + x_1\right)$$

en niets weerhoudt je om hier te stoppen

$$x_k = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x_{k-1}} + x_{k-1}\right).$$

Je kunt bewijzen (met gelijke soort berekeningen als hierboven) dat de mate waarin je ernaast zit heel snel afneemt.

1.4 Antwoorden

Antwoord opgave 1.1

10 keer 1 (is) 10
keer 2 (is) 20
etc. keer 13 is 130.

Antwoord opgave 1.2

12 keer 1 (is) 12
12 keer 2 (is) 24
etc.
12 keer 10 (is) 120

Antwoord opgave 1.3

(a) 24:24

(b) 47:17

(c) 9:38

Antwoord opgave 1.4

(a) 3:25:45

(b) 34:17:36

(c) 5:42:56:7

Antwoord opgave 1.5

Nee. Bijvoorbeeld 1:0 (is 60) is deelbaar door 3. Bij een 60-tallig stelsel is een getal deelbaar door 3 precies dan als het meest rechter getal deelbaar door 3 is.

Antwoord opgave 1.6

De inverse van 4 is 15
De inverse van 5 is 12
De inverse van 6 is 10
De inverse van 8 is 7,30
De inverse van 9 is 6,40

Antwoord opgave 1.7

(a) $\frac{23}{60} + \frac{42}{3600} = \frac{769}{2000}$

(b) $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, dus 0,45

(c) Op het tablet staat "de inverse 25 is (0,)2:24". Dat klopt $\frac{2}{60} + \frac{24}{3600} = \frac{5}{150} + \frac{1}{150} = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$.

Antwoord opgave 1.8

(a) Het klopt.

(b) $30 \cdot \sqrt{2} \approx 42,42640687$. Op het kleitablet staat $42,25 : 35$ en dat is in decimaal stelsel $0.4263888\ldots$m dus ongeveer $0,00001$ ernaast.

(c) Er is hier een vergrotingsfactor 30 toegepast op een driehoek met zijden $1 - 1 - \sqrt{2}$ (een half vierkant).

(d) $1,24 : 51 : 10$ is in decimale notatie $1,41421296296\ldots$. En $\sqrt{2} \approx 1,4142135623730951\ldots$. Het verschil is ongeveer $6 \cdot 10^{-7}$.

Antwoord opgave 1.9

$x_1 = 1,5$, $x_2 \approx 1,41666$, $x_3 \approx 1,41421568$, $x_4 \approx 1,41421356237$.

Antwoord opgave 1.10

17/12 is $1,25$ en 24/17 is afgerond op drie hexagesimalen $1,24 : 42 : 21$. Het gemiddelde daarvan (als in de formule) is $1,24 : 51 : 10$ afgerond naar beneden.

Hoofdstuk 2

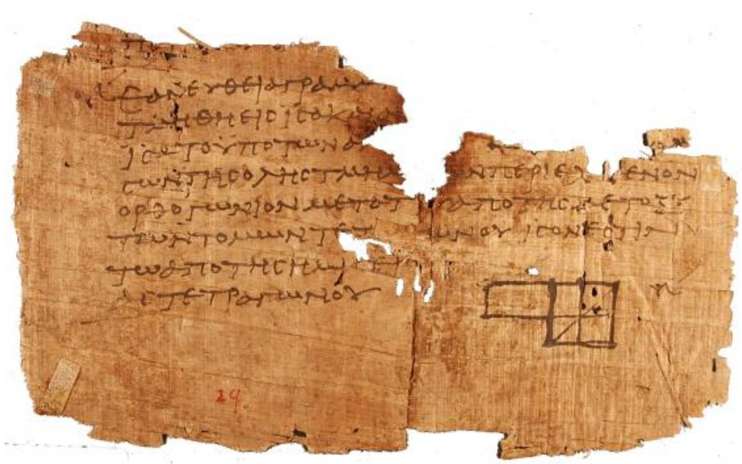
Griekenland ±300 BCE: Euclides' Elementen

2.1 Euclides en *de Elementen*

Euclides was een Griekse wiskundige werkzaam in het Egyptische Alexandrië. Hij is één van de beroemste wiskundigen aller tijden, en dat heeft hij te danken aan de serie van 13 boeken die produceerde, genaamd *de Elementen*. Hierin bewerkte en organiseerde hij de indrukwekkende kennis van vele Griekse wiskundigen in de periode 500 - 300 BCE: o.a. Pythagoras, Hippocrates van Kos, Eudoxus van Cnidus.

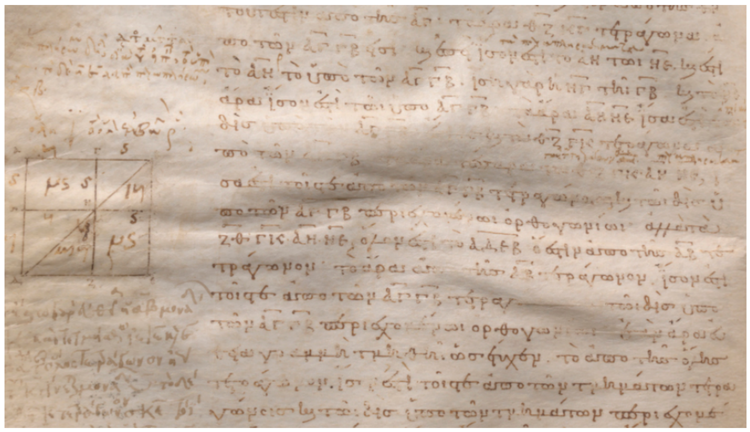
In die tijd werd op die plek geschreven op papyrus, dat helaas vergaat, met als gevolg dat de originele boeken niet bewaard zijn gebleven. De tekst is echter wel bewaard, omdat hij telkens opnieuw gekopieerd is. Tot de boekdrukkunst werd uitgevonden was dit sowieso de enige manier om als lezer aan een eigen exemplaar te komen: door het over te (laten) schrijven. Men gaat ervan uit dat de Elementen het, op de Bijbel na, meest gekopieerde boek is. Tot en met in de 20ste eeuw was het het belangrijkste wiskunde leerboek.

Een van de oudste snippers papyrus met daarop een fragment van de Elementen zie je hieronder. Hij is waarschijnlijk zo'n 1950 jaar oud. De snipper werd gevonden in Oxyrhynchus (Egypte) tezamen met vele andere in 1896-97 door B. P. Grenfell en A. S. Hunt. Zie hier een overzicht met foto's: `https://tinyurl.com/papyrusnu`. Het ligt nu in het Universiteitsmuseum van Pennsylvania (VS).



In moderne vertaling staat er "Als een lijn in twee gelijke en twee ongelijke stukken wordt verdeeld, is de rechthoek die wordt omvat door de ongelijke segmenten van het geheel samen met het vierkant op het lijnstuk tussen de snijpunten gelijk aan het vierkant op de helft”. Wat wordt hier bedoeld?

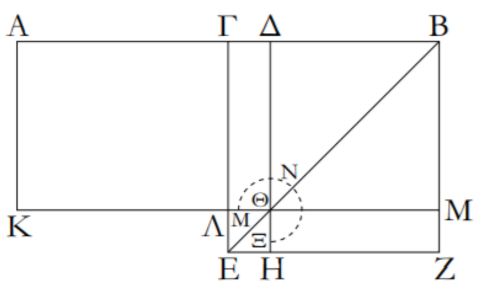
Gelukkig zijn er latere, volledige kopiën die ons verder helpen. Zo is daar de beroemde MS D’Orville 301, gekopieerd door Steven de Klerk voor Arethas van Patras, in Constantinopel in 888 CE. Het manuscript bevindt zich nu in de Bodleian Library, Oxford University. Je kunt hier (`https://www.claymath.org/library/historical/euclid/`) het hele exemplaar inzien. Hieronder een foto van ongeveer hetzelfde stuk in dit exemplaar.



Je ziet dat het plaatje de rechthoek links heeft verloren, en dat is eigenlijk wel jammer. En dan hier in een moderne vertaling van het Grieks naar het Engels: `https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf`

ε΄.

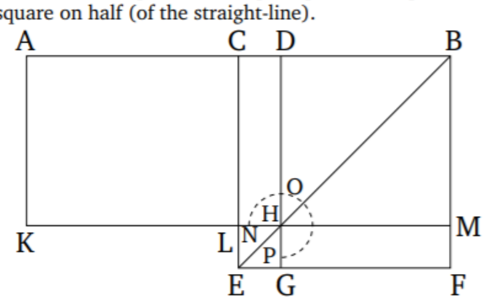
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Proposition 5‡

If a straight-line is cut into equal and unequal (pieces) then the rectangle contained by the unequal pieces of the whole (straight-line), plus the square on the (difference) between the (equal and unequal) pieces, is equal to the square on half (of the straight-line).



For let any straight-line AB have been cut—equally at C, and unequally at D. I say that the rectangle contained by AD and DB, plus the square on CD, is equal to the square on CB.

Wat ze bedoelen: aangenomen dat $|AC| = |BC|$ en $|BD| = |BM|$ geldt dat oppervlakte van de rechthoek $ADHK$ en vierkant $LHGE$ samen gelijk zijn aan de oppervlakte van vierkant $CBFE$.

Opgave 2.1. *(a) Bewijs dit*

(b) Stel $x = |AD|$ en $y = |DH|$. Welke algebraïsche gelijkheid komt tot uitdrukking deze propositie?

Deze algebraïsch uitdrukking is uiteraard iets van later datum: je zult geen algebra in de Elementen aantreffen. Als je een kijkje hebt genomen op bovengenoemde website met de Engelse vertaling, dan is je vast opgevallen hoe gestructureerd de boeken zijn opgezet. Het hele werk is opgebouwd rond axioma's, definities en proposities en elke stap wordt beargumenteerd door te redeneren en voort te bouwen op eerdere redeneringen. De manier van werken heeft door de eeuwen heen diepe indruk achtergelaten op eenieder die de Elementen bestudeerde.

2.2 Constructies

De meetkunde nam een centrale rol in bij de Grieken. Naast de bewijzen van stellingen, zoals die van Pythagoras, waren ook zogeheten constructies van groot belang. Van iedere meetkundige figuur of bewerking vroeg men zich af op die ook met passer en latje tot leven gebracht kon worden. De passer was voor het tekenen van cirkels en het latje was voor het tekenen van lijnstukken. Op het latje stonden dus geen streepjes en getallen. Ook de geodriehoek (hoekgroottes erop) was niet in de omloop.

We kiezen eerst een lijnstukje en daarvan zeggen we dat het lengte 1 heeft.

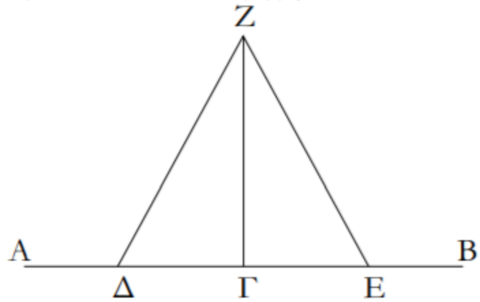
Dit is je maatstok. Zo'n ding heb je natuurlijk nodig om afstanden te meten. Als je afstanden met getallen in verband wil brengen, dan moet je ergens je *eenheid* vastleggen.

Opgave 2.2. *Construeer met alleen een latje (niet meten) en passer een lijnstuk van lengte 2.*

Opgave 2.3. *Maak met alleen latje en passer een middelloodlijn van een lijnstuk en leg uit waarom je constructie werkt. Ter ondersteuning hieronder Euclides' aanpak in Propositie 11 in boek 1.*

ιαʹ.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

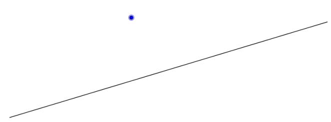


Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

In de vorige opgave heb je ook een lijnstuk met lengte $\frac{1}{2}$ gemaakt.

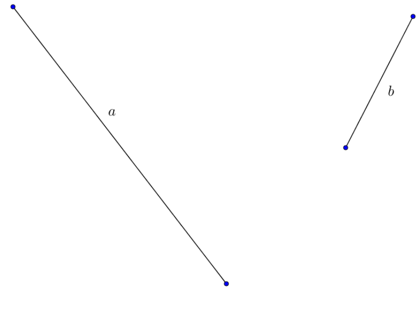
Opgave 2.4. *Gegeven een lijn en een punt dat niet op de lijn ligt, maak met alleen passer en latje een evenwijdige lijn door het punt.*



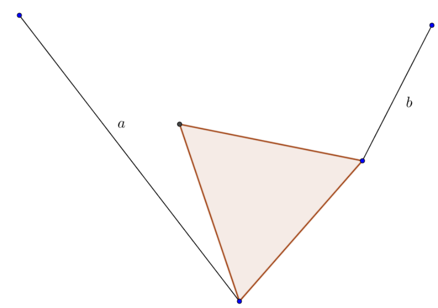
2.3 Meetkundig rekenen

Meetkunde werd niet gedaan op basis van getallen, zoals we dat nu vaak doen. De Grieken dachten over getallen eerder andersom. Een beetje gechargeerd zou je kunnen zeggen dat voor hen getallen juist gebaseerd waren op meetkunde: een getal is een afstand. Zo gek is dat niet. In de rest van dit hoofdstuk kijken we hoe ver dat idee ons brengt.

Twee getallen a en b optellen is meetkundig gezien hetzelfde als een lijnstuk maken van lengte $a + b$, gegeven de lijnstukken van lengte a en b.

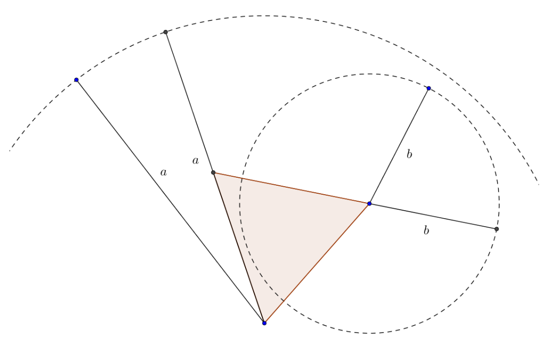


Dit gaat in drie stappen. In stap 1 maakt je een gelijkzijdige driehoek tussen een punt van het ene lijnstuk en een punt van het andere lijnstuk.

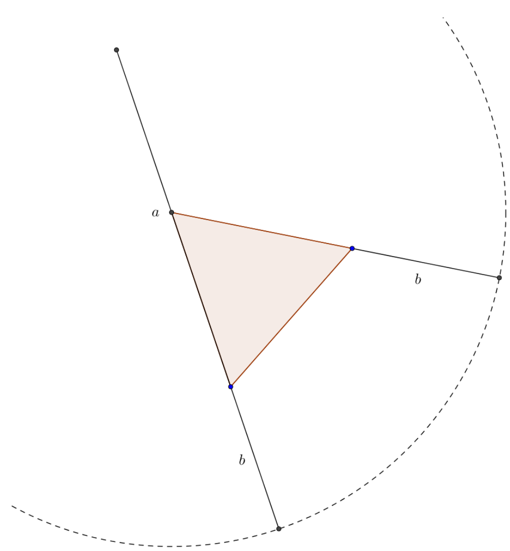


Opgave 2.5. *(a) Laat zien hoe je een gelijkzijdige driehoek maakt met alleen latje en passer.*

In stap twee breng je de lijnstukken in het verlengde van de zijden van de driehoek



In stap drie verplaats je het lijnstuk van lengte b naar het verlengde van lijnstuk a.



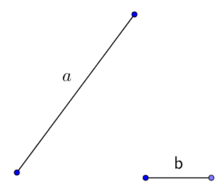
(b) Waarom sluit dit precies aan? Over hoeveel graden draai je het lijnstuk?

Klaar is kees. Dat is nog best ingewikkeld voor zoiets eenvoudigs als optellen!

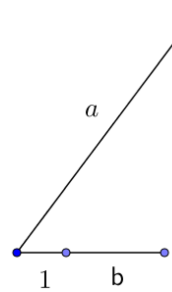
(c) *Hoe maak je een lijnstuk van lengte $a - b$?*

(d) *Waarom zou het lastig zijn voor Oude Grieken om te spreken over negatieve getallen?*

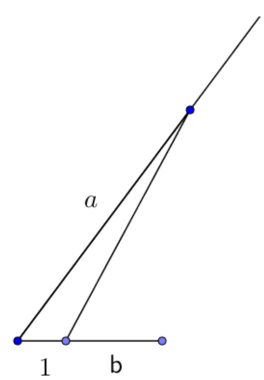
Vermenigvuldigen van lijnstukken met lengte a en b gaat ook in drie stappen. We noemen de lijnstukken a en b, naar hun lengte.



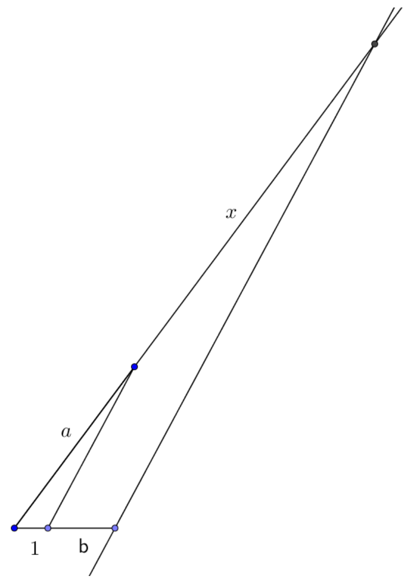
Je hebt hierbij je eenheidslijnstuk nodig (zonder lukt het niet). In de eerste stap verplaats je het lijnstuk met lengte 1 naar een uiteinde van het lijnstuk a. Je brengt het lijnstuk b naar het verlengde van 1 (op dezelfde manier als met optellen).



In stap twee verleng je lijnstuk a en trekt een lijn van het uiteinde van 1 naar het andere uiteinde van a.



Tot slot trek je een lijn evenwijdig hieraan en past hiermee een lijnstuk van lengte x af.



Opgave 2.6. *(a) Ga na met gelijkvormigheid dat $x = a\,b$.*

(b) Laat zien dat $b : a$ kunt maken door de rol van 1 en a om te draaien.

We zijn nu zo ver dat we alle rationale getallen hebben en daar ook de basisbewerkingen mee kunnen uitvoeren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen; dat alles op basis van twee stuks heel eenvoudig gereedschap. Wat voor getallen kun je nog meer maken met passer en latje?

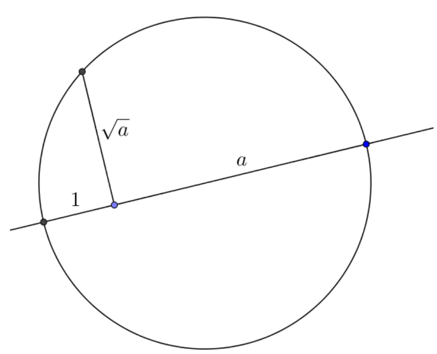
Opgave 2.7. *(a) Maak een lijnstuk van lengte $\sqrt{2}$.*

(b) Maak een lijnstuk van lengte $\sqrt{5}$.

(c) Kun je ook een lijnstuk van lengte $\sqrt{6}$ maken op de manier van onderdeel (a) en (b)?

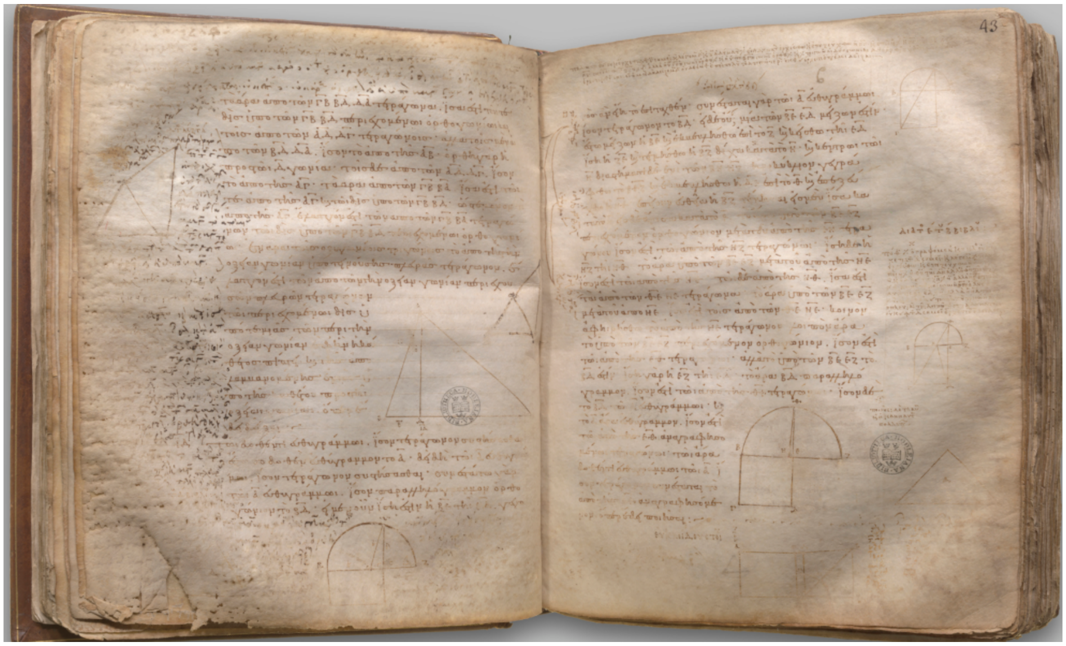
Er bestaat gelukkig een heel eenvoudige manier om de wortel te nemen van een lijnstuk met lengte a. Opnieuw heb je je eenheidslijnstuk nodig.

Opgave 2.8. *We geven deze keer alleen het volgende plaatje:*



Beschrijf nu de constructie en leg uit waarom die werkt.

Deze constructie staat in de Elementen boek 2 propositie 14 (zie hieronder). Euclides heeft het uiteraard niet over wortel a, maar over de constructie van een vierkant waarvan de oppervlakte gelijk is aan de lengte van een gegeven lijnstuk.



Helaas houdt het hier wel zo'n beetje op met de rekenkundige kracht van de passer en de lat. De getallen die je ermee kunt maken worden ook wel de *construeerbare getallen* genoemd.

Getallen als $\log(2)$, $\sin(20^\circ)$ en $\sqrt[3]{2}$ laten zich niet construeren met alleen dit gereedschap. Dat laat een beperking zien van de notie van een getal als lengte of afstand. Alhoewel je je gereedschap dan zou kunnen uitbreiden. Neem bijvoorbeeld de neusis lat. Met dit meetkundig gereedschap, dat al in de Griekse Oudheid bekend was, erbij kun je dan weer wel derdemachtswortels construeren.

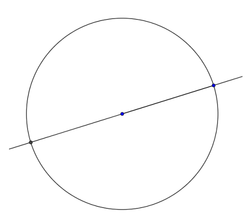
2.4 Antwoorden

Antwoord opgave 2.1

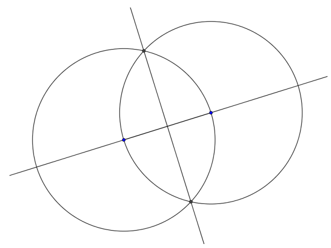
(a) Gebruik dat de rechthoek $DBFG$ congruent is met de rechthoek $KACL$. Verder overlappen de twee figuren.

(b) $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

Antwoord opgave 2.2



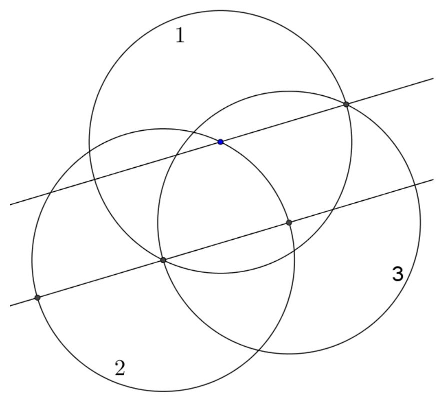
Antwoord opgave 2.3



De snijpunten van de cirkels liggen even ver van beide grenspunten van het lijnstuk. De middelloodlijn bestaat per definitie uit dit soort punten, dus een lijn door twee ervan is de lijn die we willen.

Antwoord opgave 2.4

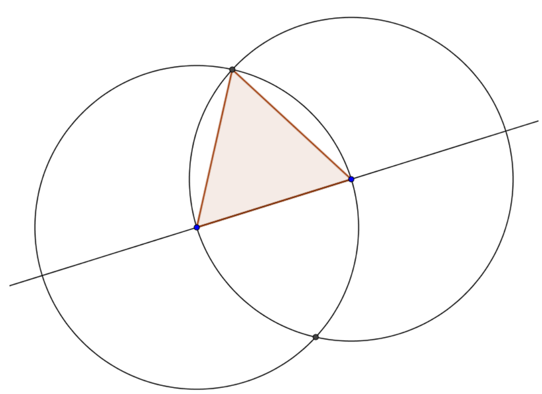
Je tekent drie cirkels in aangegeven volgorde.



De eerste cirkel is willekeurig, zolang hij maar de lijn snijdt. Let op hoe je op deze manier een ruit maakt, met gegarandeerd evenwijdige overstaande zijden.

Antwoord opgave 2.5

a) Gebruik twee cirkels:



b) Omdat we met een gelijkzijdige driehoek werken. De zijde + lijnstuk b vormen voor en na de straal van de cirkel.

c) Bijvoorbeeld met behulp van een cirkel van straal b nadat je $a + b$ hebt gemaakt.

d) Een lengte kan niet negatief zijn.

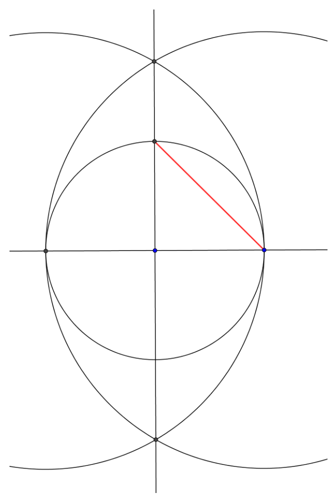
Antwoord opgave 2.6

a) Schuif b evenwijdig omhoog. Dan zie je twee gelijkvormige driehoeken. Er volgt: $a/1 = x/b$ en vermenigvuldigen met b geeft het gevraagde.

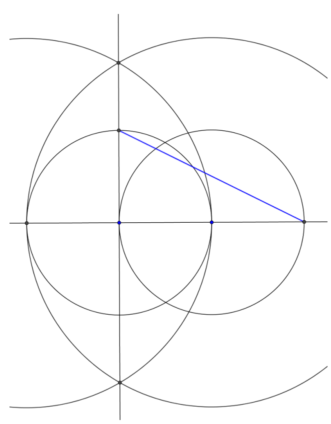
b) Als je de rol van a en b omdraaid, dan ligt b in het velengde a en gaat 1 schuin omhoog. Uit gelijkvormigheid volgt dan $1/a = x/b$. Vermenigvuldigen met b geeft het gevraagde.

Antwoord opgave 2.7

a) Het rode lijnstuk



b) Het blauwe lijnstuk



c) nee, het is niet de lengte van de hypothenusa van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van gehele lengte.

Hoofdstuk 3

India ±1400 CE en Europa ±1700 CE: getallen benaderen

3.1 Bespiegeling op wat een getal is

Mensen en computers produceren alleen eindige symbolreeksen. Een mens of computer kan een breuk produceren als antwoord op een berekening of een getal in een aantal decimalen. Als mensen toch met ingewikkeldere getallen bezig willen zijn, dan moeten ze met een manier komen om dat het getal te beschrijven met eindig veel symbolen.

Je kunt het getal π beschrijven als de omtrek van een cirkel met diameter 1. Dit is een meetkundige manier om getallen te beschrijven. Zodra je omtrekken, oppervlaktes, volumes en dergelijke gaat gebruiken om getallen te genereren, haal je ook in veel gevallen oneindige procedures via de achterdeur binnen. Vanwege de kromming van de cirkel is het een oneindige bezigheid om de omtrek te benaderen met een rechte "eenheids-stok". Desalniettemin is dit wel een manier waarop π benadert kan worden: door de omtrek van n-hoekige veelhoeken die in de cirkel passen te berekenen[1]

We zagen al dat de Grieken over getallen dachten als een lengte, die geconstrueerd diende te worden. Een moderner antwoord op de vraag "wat is een getal?" luidt "een recept om (de decimalen van) een getal te benaderen". Bij een recept moet je denken aan een algoritme voor een computer. Het beschrijft heel precies hoe je een rij rationale getallen kunt maken die steeds meer focus krijgen, steeds minder van elkaar afwijken. Het kan zijn dat de rij nooit stopt, zoals bij het beroemde getal π. Het recept is dan op een bepaalde manier meer tastbaar of "echter" voor ons, dan die reeks decimalen die nooit stopt.

"Een recept als getal" lijkt erg op de recepten die we gebruikten om meetkundig getallen te maken. Voor $\sqrt{2}$ had je een recept dat je met passer en latje uit moest voeren. Nu is je gereedschap alleen je eigen brein (met pen en papier erbij misschien) of een computer: iets waarmee je het recept uit kunt voeren. Het grote verschil is dat we in dit hoofdstuk accepteren dat we het recept in veel gevallen niet helemaal kunnen uitvoeren: we produceren maar een deel van het getal.

De verzameling van deze getallen heten de *berekenbare getallen*. Een beetje een rare naam, omdat je een deel van de berekenbare getallen nooit helemaal kunt berekenen. Maar je kunt ze dus wel in principe zo precies berekenen als je wilt.

[1] In feite steekt zo'n manier van benaderen achter de manier waarop wiskundigen in het algemeen de lengte van een kromme definiëren.

3.2 Madhava en Gregory

James Gregory (1638-1675) hield zich eind 17de eeuw bezig met hoe je getallen kon benaderen met oneindige rijen (ook wel reeksen genoemd). Hieronder zie je een transcriptie van een extract van een beroemde brief die Gregory in 1671 stuurde aan Collins een andere bekende wiskundige uit zijn tijd.

Sit Radius $= r$
Arcus $= a$
Tangens $= t$
Secans $= s$

$$\textbf{Erit } a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c.$$

$$\textbf{Eritque } t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{3233a^9}{181440r^8} + \&c.$$

Via deze link, `https://books.google.nl/books?id=0h45L_66bcYC&pg=PA216`, vind je het hele extract en meer brieven tussen de twee. Gregory had zich al eerder met oneindige rijen bezig gehouden in benadering van de logaritme. Dat was in reactie op ontdekking op het gebied van oneindige rijen voor de sinus en cosinus en hun inverse functies van zijn tijdgenoot Newton. In deze brief richt Gregory zijn aandacht op enkele andere goniometrische functies. De booglengte staat genoteerd als a. Hier staat r voor de radius, en De t lijkt te staan voor de radius r keer de tangens zoals wij die kennen(!).

Opgave 3.1. *Neem* $r = 1$, $a = \frac{\pi}{4}$.

a) Wat is dan t*?*

b) Hoe gaat de reeks eruit zien?

Men gaat er nu vanuit dat Gregory zijn reeks ook kon bewijzen met behulp van een algemene methode die later de Taylor reeks is gaan heten. Enkele jaren later, in 1674, ontdekte en publiceerde Gottfried Leibniz dezelfde reeks, met een bewijs dat gebruikmaakte van de toentertijd gloednieuwe methode uit de differentiaalrekening: partiële integratie. Hij kreeg hiervoor de hoogste lof van hotemetoten als Huygens en Newton. Maar deze westerse heren waren in feite niet de eerste der homo sapiens die deze reeks opkrabbelden, maar dat konden ze niet weten. Het duurde nog eeuwen eer in het westen duidelijk was wat er al veel eerder in India zich afspeelde.

Het duurde nog eeuwen voor in het westen werd kennisgenomen van het boek Yuktibhasa geschreven door Jyesthadeva rond 1530. Een sta-in-de-weg hier was dat het boek was geschreven in het Malayalam een lokale taal in Kerala, een streek in het zuiden van India. Het boek Yuktibhasa vat samen wat er aan wiskundige kennis ontwikkelt is in de Kerala school voor wiskunde en astronomie de twee voorgaande eeuwen (net zoals de Elementen dat doet voor de meetkunde in de Griekse oudheid). De reeksen die Newton en Gregory vonden voor de goniometrische functies staan beschreven in de Yuktibhasa, met een zekere vorm van bewijs. Nog spectaculairder is dat deze resultaten worden toegeschreven aan de oprichter van de Kerala school, Madhava van Sangamagrama, die leefde rond 1400 CE. Helaas is het werk waarnaar verwezen wordt verloren gegaan, maar is geen reden om te twijfelen aan de referentie.

एतन्न्यायेनैव ज्यां चापयेत्। इह भुजाकोटिज्या [सु]लघ्वीभूता या तत्चापनप्रकारं प्रतिपादयति। तत्र च भुजा लघ्वीति पूर्वं कल्पयति इमामिष्टज्यां व्यासार्धेन गुणित्वा कोटिज्यया हृतं पूर्वोक्तफलम्। अनन्तरमिदंफलमेव भुजावर्गेण गुणित्वा कोटिवर्गेण हृतं द्वितीयं फलम्। अनन्तरमेतद्द्वितीयफलं भुजावर्गेणैव गुणितं कोटिवर्गेण हृत्वा द्वितीयफलोत्पादनमिव तृतीयञ्च फलमुत्पादय। अनन्तरं तत्तस्मात् उपरिफलञ्च उत्पादय। एतत्गुणहारेणैव उत्पन्नफलपरंपरां क्रमेण एकं त्रीणि पञ्चेति ओजसंख्याभिः हरयेत्। फले पूर्वोक्तं तृतीयं पञ्चममिति। इत्थं ओजानि सर्वाणि मिथो मिलित्वा एतस्मात् द्वितीयं चतुर्थमारभ्य विद्यमानस्य तस्य योगं त्यजेत्। शेषं चापम्। तत् राशित्रये त्यक्तश्चेत् कोटिचापम्। कोटिचापफलं लघु चेत् पूर्वोक्तकोटिचापमुत्पादयेत्।

Figuur 3.1: Een fragment uit de Yuktibhasa vertaald naar het Sanskriet. Vermoedelijk is dit de passage hieronder beschreven

In de Yuktibhasa wordt geen algebra gebruikt. Integendeel, de resultaten worden in een soort dichtvorm gepresenteerd. Hieronder wordt de reeks voor de lengte van een boog met gegeven straal en hoek gegeven, in vertaling van R.C.Gupta luidt dit
"De eerste term is het product van de gegeven sinus en straal van de gewenste boog gedeeld door de cosinus van de boog. De volgende termen worden verkregen door een iteratieproces wanneer de eerste term herhaaldelijk wordt vermenigvuldigd met het kwadraat van de sinus en gedeeld door het kwadraat van de cosinus. Alle termen worden vervolgens gedeeld door de oneven getallen 1, 3, 5, ... De boog wordt verkregen door respectievelijk de termen van de oneven rang en die van de even rang op te tellen en af te trekken."

Opgave 3.2. *We schrijven r voor de straal, θ voor de hoek in radialen, en a voor de lengte van de boog. Dan geldt $a = r\theta$.*

a) *Zet deze geschreven tekst om in een wiskundige uitdrukking in moderne notatie.*

b) *Leg uit hoe dit dezelfde reeks is die Gregory vond.*

साधयित्वा ध्रुवांश्चैव ध्रुवकालांस्तथानयेत् ।
आद्यमल्पतमं कृत्वा यथाऽधिकतमोऽन्तिमः ॥११॥

तैः सार्धं तत्र तत्र स्युः सह तद्वाक्यसंख्यया ।
तद्ध्रुवा स्वार्कमध्याय स्वसाधकफलान्विताः ॥१२॥

[1]अत्राप्यौत्पत्तिकोऽस्त्येव वेण्वारोह इव क्रमः ।
द्युनिशोरविशेषेण द्वयोस्तत्पार्श्वयोरिव ॥१३॥

Figuur 3.2: Een aantal versen uit een originele tekst over de beweging van de maan van Madhava uit ongeveer 1400

3.3 Een benaderingen van π via arctan

In de vorige paragraaf ging het over de ontdekking van de benadering van π als

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots.$$

Hieronder geven we een moderne afleiding. Elementen daarvan, waren op informele wijze al bekend bij Madhava, vermoedt men.

Een eerste ingrediënt bij deze benadering van π is de meetkundige reeks (zeker bekend bij Madhava):

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Als $-1 < x < 1$, dan geldt

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Dat gaan we nu aannemenlijk maken.

Opgave 3.3. *(a) Leg met behulp van haakjes uitwerken uit waarom*

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) = 1$$

Deel nu beide zijden door $(1-x)$ *en je hebt het resultaat.*

(b) Wat gaat er mis als $x > 1$ *of* $x < -1$*?*

Een tweede ingrediënt is de afgeleide van de inverse functie van de tangens. We noteren de inverse van de tangens met arctan (soms zie je ook $\tan^{\text{inv}}$ of $\tan^{-1}$).

De afgeleide van de arctangens is zelf geen goniometrische functie:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

In de volgende opgave leer je waarom met behulp van de kettingregel.

Opgave 3.4. *(a) Leg uit dat*

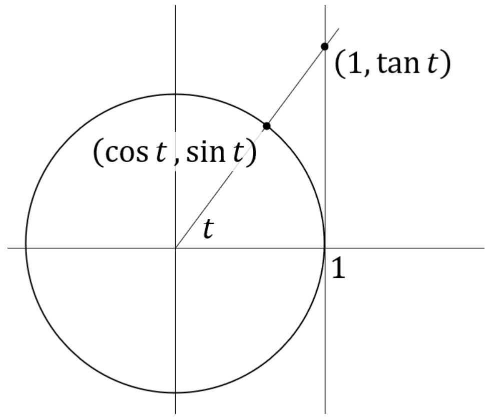
$$\frac{d}{dt}\tan(t) = \frac{d}{dt}\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Uiteraard $\tan(\arctan(x)) = x$.

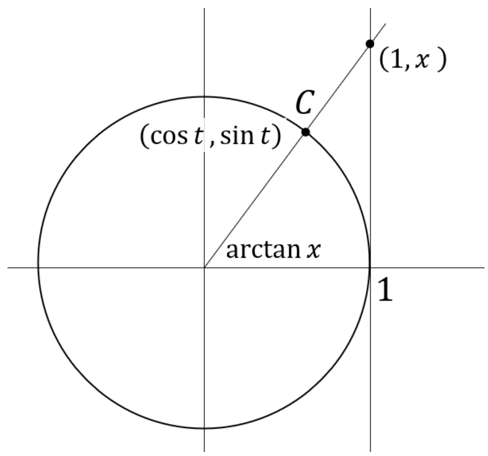
(b) Differentieer beide zijden en gebruik de kettingregel om uit te leggen dat

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \cos^2(\arctan(x)).$$

Het blijkt dat $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$*. Maar daar moeten we nog wat werk voor verrichten en een goed begrip hebben van wat de goniometrische functies betekenen. De cosinus en sinus zijn gedefinieerd via de eenheidscirkel.* $\cos(t)$ *en* $\sin(t)$ *zijn respectievelijk de* x*- en* y*-coördinaat van het snijpunt van de eenheidscirkel en de halve lijn die een hoek* t *met de positieve* x*-as maakt. Maar ook de tangens kun je via dit plaatje definiëren. Het is de* y*-coördinaat van het snijpunt van de verticale lijn door* $(1,0)$ *en de lijn die een hoek* t *met positieve* x*-as.*



Als je gebruikt dat $t = \arctan x$ *en* $x = tant$, *dan krijg je het volgende plaatje.*



De x*-coördinaat van punt* C *is nu* $\cos(\arctan(x))$.

(c) Bereken met deze figuur dat

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

En kwadrateren geeft het gewenste resultaat.

In de derde stap combineren we de volgende twee:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

voor $-1 < x < 1$.

Opgave 3.5. *(a) Leg uit wat er gebeurt bij het tweede =-teken.*
Vervolgens integreren we aan beide kanten over het interval $0 < x < 1$. *Dan vinden we*

$$\arctan(1) = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots)dx$$

Als je nog niet ebt leren integreren, lees dan de crash course hieronder.

(b) Leg dat uit.

(c) Bereken beide zijden en vind de gewenste reeks voor π.

(d) Pas het argument hierboven iets aan om de algemene reeks te bewijzen.

Met behulp van de somformule voor arctan (vergelijkbaar met de somformules voor sin en cos) kun je nog snellere benaderingen maken: deze methode is vernoemd naar John Machin, zie `https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula`.

Integreren. Voor de context van de bovenstaande opgave kun je over integreren nadenken als het tegenovergesteld van differentiëren. Bijvoorbeeld, aangezien de afgeleide van x^3 wordt gegeven door $3x^2$, geldt omgekeerd dat $3x^2$ integreren geeft x^3. Dit noteer je met

$$\int 3x^2 dx = x^3.$$

We negeren hier even het feit dat je bij x^3 nog een constante op zou kunnen tellen. Algemener geldt dus

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c;$$

Controleer maar door de uitdrukking rechts te differentiëren. Als er getallen bij het uiteinde van het integraalteken staan, dan moet je die invullen en het verschil nemen. Dus, in ons voorbeeld:

$$\int_0^1 3x^2 dx = 1^3 - 0^3 = 1$$

Als de twee bovenstaande feiten over integreren samenneemt kun je schrijven

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

en dat is alles dat je in bovenstaande opgave nodig hebt.

3.4 Antwoorden

Antwoord opgave 3.1

(a) $t = \tan(\pi/4) = 1$

(b) $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 -$etc.

Antwoord opgave 3.2

(a) Dat komt herschreven neer op

$$a = \frac{\sin(\theta) r}{\cos(\theta)}/1 - \frac{\sin^3(\theta) r}{\cos^3(\theta)}/3 + \frac{\sin^5(\theta) r}{\cos^5(\theta)}/5 - \dots$$

(b) Gebruik dat $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos\theta$. Dan krijg je

$$a = r\tan(\theta) - r\tan^3(\theta)/3 + r\tan^5(\theta)/5 - \dots$$

Gregory's "tangens" is onze tangens keer r, dus $t = r\tan\theta$. Substitueer en je ziet het verband.

Antwoord opgave 3.3

(a) Het is

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots - x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

Haakjes wegwerken geeft

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)$$

en alle termen behalve 1 vallen tegen elkaar weg.

(b) Dan is de reeks divergent: wat je erbij optelt wordt steeds groter.

Hoofdstuk 4

Europa ±1900: verzamelingen en getallen

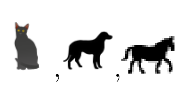
4.1 Een fundament voor getallen

Voor zover bekend was het idee van getal voor de Babyloniërs nog volledig intuïtief. Voor de Grieken was het stevig verbonden met de vlakke meetkunde, en het idee of een getal als lengte van een lijnstuk geconstrueerd kon worden. Vanaf omstreeks 1400 in India en vanaf 1650 in West-Europa werd het idee geaccepteerd dat een getal gegeven werd door een eindige of oneindige rij of som. Maar juist de notie van oneindig bleef in zekere zin ongetemd. Juist met oneindig in het hoofd ondernam de Duitse wiskunde Georg Cantor (1845 - 1918) een poging om getallen te definiëren. Hij deed dat door de notie van getal te funderen, niet in meetkunde zoals de Grieken, maar in de notie van verzameling. Dit fundament onthulde echter een kijk op oneindigheid die als een schokgolf door de wiskundige wereld ging. In dit laatste hoofdstuk bekijken we wat verzamelingen zijn en hoe je de notie van getal daarin kunt verankeren. Tot slot zul je zien dat je zien hoe het begrip oneindig zich ontwikkelt vanuit dit gezichtspunt.

4.2 Verzamelen

Kleine kinderen leren tellen door eerst een rij klanken te memoriseren: "'één, twee, drie, vier, vijf, ...". Het tellen gaat echter in het begin meestal mis, ten eerste, omdat het kind niet netjes per object één woord gebruikt; ten tweede omdat het kind de objecten niet goed geordend langsgaat en sommige objecten meer dan eens telt. Pas als de woorden als losse objecten worden geïdentificeerd en de objecten netjes geordend worden voor het tellen, gaat het goed.

Om goed te kunnen tellen moeten objecten eerst goed afgeperkt worden. Wiskundigen spreken over verzamelingen, bijvoorbeeld de verzameling van Beneluxlanden (Nederland, België en Luxemburg) of de verzameling van alle soorten fruit. Een eenvoudige manier om een verzameling te noteren is met accolades en komma's:

{  }

is een verzameling plaatjes van dieren. Soms moet de context uitsluitsel bieden om welke verzameling het gaat: noteert de verzameling

{Clinton, Bush, Obama, Trump}

een verzameling presidenten of een verzameling achternamen? Het is een lijst symbolen en je kunt nog flink filosoferen over kwesties van verwijzing en representatie. Omdat de notie van verzameling het fundament zal vormen, wordt die term zelf niet gedefinieerd.

De objecten in een verzameling worden ook wel *elementen* genoemd. Dat a een element is van de verzameling letters $\{a, b, c\}$ noteer je met

$$a \in \{a, b, c\}.$$

In bovenstaande voorbeelden wordt aangegeven welke objecten in de verzamelingen zitten door ze op te noemen. Dat is niet altijd handig als de verzameling heel groot is, en werkt zelfs niet als de verzameling oneindig groot is. Dan wordt de verzameling gewoon omschreven en als volgt genoteerd:

$$\{\text{alle Nederlandse mannen met een leeftijd tussen 18 en 65 jaar}\}$$

of

$$\{\text{alle even getallen}\}.$$

Vaak worden ook puntjes gebruikt, bijvoorbeeld:

$$\{a, b, c, \ldots, y, z\}$$

voor de verzameling letters van het alfabet. Je kunt dus puntjes gebruiken als het duidelijk is voor de lezer wat daar moet komen.

Verzamelingen kun je samenvoegen:

$$\{a, b, c\} \cup \{c, e\} = \{a, b, c, e\}$$

of de doorsnede nemen

$$\{a, b, c, d\} \cap \{a, d, e, f\} = \{a, d\},$$

dat wil zeggen de objecten nemen die in beide verzamelingen zitten. Er is één heel bijzondere verzameling: de lege verzameling. Dit is de verzameling die geen elementen bevat. Hij wordt genoteerd door $\emptyset$.

Opgave 4.1. *Bereken de volgende verzamelingen:*

a) $\{a, b, c\} \cup (\{a, b, c, d, e\} \cap \{e, b, d\})$

b) $\{\textit{positieve even getallen}\} \cap \{\textit{drievouden}\}$

c) $(\emptyset \cup \{a\}) \cap (\{a, b\} \cap \emptyset)$

4.3 Cardinaliteit

Met verzamelingen als fundament, beginnen we dus op een punt dat getallen nog niet gedefinieerd zijn. Dat gaan we weldra op een manier doen die past bij de manier waarop kinderen leren tellen. Dat doen ze door een rij woorden met een verzamelingen te vergelijken. Dat vergelijken doe je door een 1-op-1 koppeling te maken tussen de woorden en de objecten die je telt. Zulk soort vergelijken worden centraal gesteld als volgt. Twee verzamelingen hebben dezelfde hoeveelheid objecten als je een 1-op-1-correspondentie tussen de objecten kunt maken. Wat dat is leggen we uit met een voorbeeldje.

De verzameling $\{a, b, c\}$ en $\{$ , ,  $\}$ hebben dezelfde hoeveelheid objecten, want je kunt bijvoorbeeld de volgende correspondentie maken:

$\{($ $a,$  $)$, $($ $b,$  $)$, $($ $c,$  $)\}$

Opgave 4.2. *a) Geef nog een mogelijke 1-op-1-correspondentie tussen bovenstaande verzamelingen.*

b) Geef een 1-op-1-correspondentie tussen de verzameling $\{a, b, c, d\}$ *en* $\{a, b, d, e\}$*. Let op je notatie.*

We weten nu wanneer twee verzamelingen dezelfde hoeveelheid objecten of elementen hebben. We zeggen dan dat ze dezelfde *cardinaliteit* hebben. Maar we hebben nog geen enkel getal gedefinieerd. Daarvoor is de volgende truc bedacht, met behulp van de lege verzameling. Er is precies één unieke, universele, abstracte verzameling met nul elementen: de lege verzameling $\emptyset$. Met alleen deze verzameling en zonder verder te verwijzen naar iets in de wereld om ons heen kunnen we nu een verzameling met precies n element maken: $\{\emptyset\}$. Het ene element is de lege verzameling zelf: wat een truc! Hoe maken we een abstracte verzameling met precies twee elementen? $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, de verzameling met erin (1) de lege verzameling en (2) de verzameling met de lege verzameling erin. En zo kun je doorgaan:

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Opgave 4.3. *Wat is de volgende verzameling in deze reeks?*

We noteren de verzamelingen waarvan we de cardinaliteit zeker weten (zoals hierboven besproken) met dikgedrukt: $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$. Het bovenstaande kun je dus samenvatten als $\mathbf{0} = \emptyset$ en

$$\mathbf{n} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n} - \mathbf{1}\}.$$

Het getal n is dan per definitie de cardinaliteit van de verzameling $\mathbf{n}$. Als een verzameling A dezelfde cardinaliteit heeft als de verzameling $\mathbf{n}$ (dat wil zeggen dat er een 1-op-1-correspondentie tussen de verzameling A en $\mathbf{n}$ is), dan zeggen we dat A cardinaliteit n heeft en noteren dat als

$$|A| = n.$$

Dus positieve gehele getallen zijn gedefinieerd als de cardinaliteit van de speciale verzamelingen hierboven. Natuurlijk ging Cantor vanaf hier door met het bestuderen van de cardinaliteit van oneindige verzamelingen, zoals de verzameling van breuken, en de verzameling van reële getallen, en daar wacht een verrassing.

4.4 Aftelbaar oneindig

Natuurlijk kunnen we een mooie verzameling maken met alle positieve gehele getallen die we zojuist "gemaakt" hebben:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

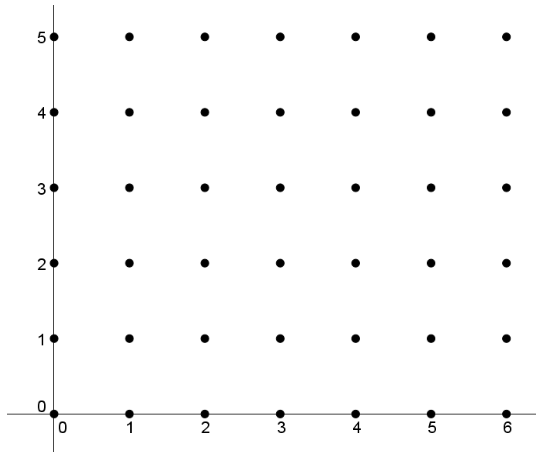
Deze verzameling heet de verzameling van *natuurlijke getallen* en wordt genoteerd door $\mathbb{N}$. Een logische vraag is: wat is de cardinaliteit van deze verzameling? Het is in ieder geval niet een natuurlijk getal.

Opgave 4.4. *Waarom niet?*

De conclusie is dat het een nieuwe cardinaliteit is. Men noemt het *aftelbaar oneindig* of *aleph nul* en noteert

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Opgave 4.5. *Laat zien dat de gehele punten in het eerste kwadrant een aftelbare oneindige verzameling vormen. Hint: je moet dus een 1-op-1 relatie beschrijven tussen de getallen* $1, 2, 3, \ldots$ *en de punten in het rooster. Hoe kun je alle punten op een gestructureerde manier doorlopen?*



Je kunt laten zien dat een verzameling A aftelbaar is door een aftelling te maken. Je geeft dan een recept waarmee je alle elementen in A koppelt aan een positief geheel getal. Dit is wat je in de vorige opgave hebt gedaan als het goed is.

Let op: over $\aleph_0$ wordt niet gesproken als een getal. Alleen als de cardinaliteit van een verzameling. Als je probeert te rekenen met $\aleph_0$ gebeuren er namelijk een hoop vreemde dingen. Een mooie manier om dat te illustreren is via het Hilbert Hotel, een denkbeeldig hotel dat in 1924 in een lezing werd geïntroduceerd door de belangrijke wiskundige David Hilbert. De volgende opgave gaat over dit hotel.

Opgave 4.6. *Het hotel van Hilbert heeft aftelbaar oneindig veel kamers. Het hotel doet prima zaken: alle kamers zijn vol! Maar dan komt er nog een gast. Moet die weg worden gestuurd of is er een oplossing? De gasten die al in het hotel verblijven zijn allen heel welwillend en vinden het niet erg van kamer te veranderen. Dat geeft mogelijkheden.*

(a) Hoe maak je ruimte voor die gast?

Mooi. Dat is opgelost. Maar vervolgens komt er een enorme bus met 1 miljoen extra gasten.

(b) Hoe ga je die in het hotel passen?

En net nu iedereen zich weer geïnstalleerd heeft in zijn kamer, komt er een supergrote bus met aftelbaar oneindig nieuwe gasten aan. Wegsturen? Nee! Past makkelijk, maar houd er wel rekening mee dat een gast pas naar een nieuwe kamer gaat als hij een exact kamernummer heeft gekregen.

(c) Hoe ga je aftelbaar oneindig veel extra gasten in het volle hotel passen?

Maar het hotel is zeer in trek. Er arriveren nog twee bussen met aftelbaar oneindig veel gasten.

(d) Leg uit hoe je deze in het hotel past.

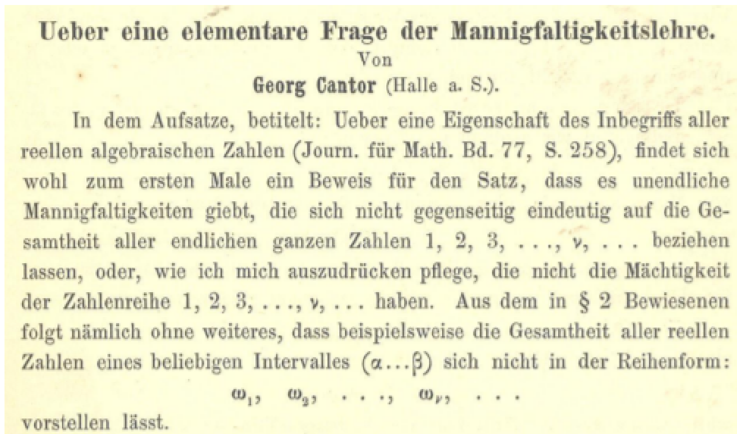
Tot slot rijden er aftelbaar oneindig veel bussen met aftelbaar oneindig veel gasten voor.

(e) Leg uit hoe je deze in het hotel past.

Zie ook een mooie animatie over het Hilbert Hotel op `https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo`

4.5 Oneindig veel oneindigen

Cantor verraste de wereld door te bewijzen dat er oneindig veel "soorten" oneindig zijn. Het artikel vind je hier `https://uvatoc.github.io/docs/cantor-proof.pdf` en zou je kunnen lezen met je huidige kennis, maar zeker na het doorwerken van deze paragraaf. Eventueel vind je hier een vertaling: `https://tinyurl.com/oneindig`.



Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.
Von
Georg Cantor (Halle a. S.).

In dem Aufsatze, betitelt: Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen (Journ. für Math. Bd. 77, S. 258), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, dass es unendliche Mannigfaltigkeiten giebt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., ν, ... beziehen lassen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., ν, ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, dass beispielsweise die Gesamtheit aller reellen Zahlen eines beliebigen Intervalles (α...β) sich nicht in der Reihenform:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu, \quad \ldots$$

vorstellen lässt.

Figuur 4.1: Het begin van Cantor's artikel over oneindig

Cantor maakt in het artikel gebruik van de notie van deelverzameling. We noemen een verzameling A een deelverzameling van een verzameling B, als ieder element van A ook in B zit. Je noteert dit als $A \subset B$. Bijvoorbeeld:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}.$$

We gaan nu een belangrijke, abstracte stap doen. We bekijken de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Die noteren we met $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Je schrijft dus

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

In het algemeen definiëren we voor iedere verzameling A de *machtsverzameling* $\mathcal{P}(A)$ van A door

$$\mathcal{P}(A) := \{\text{alle deelverzamelingen van } A\}.$$

Wat is de cardinaliteit van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Heel $\mathbb{N}$ zit in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als de verzamelingen met één element:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Dus de cardinaliteit is groter dan of gelijk aan $\aleph_0$.

Cantor ontdekte dat de cardinaliteit van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ strikt groter is dan $\aleph_0$! Hij noemde die nieuwe cardinaliteit $\aleph_1$. Zijn bewijs gebruikte een prachtige techniek die nu *diagonaalargument* wordt genoemd. In de volgende opgave leer je hoe dit in zijn werk gaat.

Opgave 4.7. *Cantor representeerde iedere deelverzameling van* $\mathbb{N}$ *als een rijtje nullen en enen. Bijvoorbeeld, het rijtje*

$$1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots$$

staat voor de verzameling

$$\{1, 3, 4, 6\}$$

en

$$0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$$

voor

$$\{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

(a) Wat is Cantor's systeem?

(b) Beschrijf het rijtje bij de deelverzameling van alle even getallen.

We bewijzen uit het ongerijmde. Daarom nemen we nu eerst aan dat er een aftelling van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, oftewel een aftelling van de rijtje nullen en enen is. Dat is dus een oneindige opsomming van die rijtjes, bijvoorbeeld:*

$$\begin{array}{r} 1,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,\ldots \\ 0,1,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,1,\ldots \\ 1,0,1,1,1,1,1,0,0,1,0,0,1,\ldots \\ 1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,\ldots \\ 1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,\ldots \\ etc. \end{array}$$

Het punt is dat we kunnen bewijzen dat zo'n aftelling nooit compleet is. We maken daartoe een nieuwe rijtje door naar de diagonaal te kijken:

$$\begin{array}{r} \mathbf{1},1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,\ldots \\ 0,\mathbf{1},1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,1,\ldots \\ 1,0,\mathbf{1},1,1,1,1,0,0,1,0,0,1,\ldots \\ 1,0,0,\mathbf{0},0,1,1,0,1,0,1,1,1,\ldots \\ 1,1,0,1,\mathbf{1},1,1,1,1,1,0,0,1,\ldots \\ etc. \end{array}$$

Het nieuwe rijtje bestaat uit de diagonaal, maar dan 0 en 1 verwisseld:

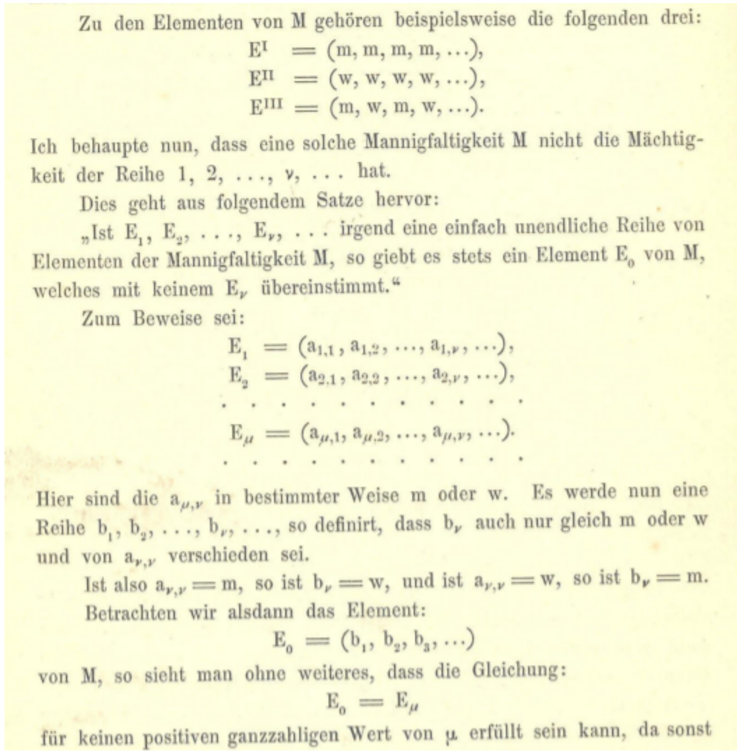
$$0,0,0,1,0,\ldots$$

(c) Leg uit dat dit rijtje niet in de aftelling kan voorkomen.

Dit is een tegenspraak: een aftelling hoort geen van de rijtjes over te slaan. Dat betekent dat de aanname dat zo'n aftelling bestaat onjuist is. Dus $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *is niet aftelbaar oneindig.*

Men zegt dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ overaftelbaar oneindig is en noteert

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| =: \aleph_1.$$



Zu den Elementen von M gehören beispielsweise die folgenden drei:

$$E^{I} = (m, m, m, m, \ldots),$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, \ldots),$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, \ldots).$$

Ich behaupte nun, dass eine solche Mannigfaltigkeit M nicht die Mächtigkeit der Reihe 1, 2, ..., ν, ... hat.

Dies geht aus folgendem Satze hervor:

„Ist $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ irgend eine einfach unendliche Reihe von Elementen der Mannigfaltigkeit M, so giebt es stets ein Element E_0 von M, welches mit keinem E_ν übereinstimmt."

Zum Beweise sei:

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots).$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Hier sind die $a_{\mu,\nu}$ in bestimmter Weise m oder w. Es werde nun eine Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$, so definirt, dass b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ verschieden sei.

Ist also $a_{\nu,\nu} = m$, so ist $b_\nu = w$, und ist $a_{\nu,\nu} = w$, so ist $b_\nu = m$.

Betrachten wir alsdann das Element:

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

von M, so sieht man ohne weiteres, dass die Gleichung:

$$E_0 = E_\mu$$

für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst

Figuur 4.2: Cantor gebruikt het diagonaalargument

Maar nu is het hek van de dam! Je kunt vervolgens de machtsverzameling van de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ nemen:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$$

In de opgave hieronder gaan we aantonen dat de cardinaliteit van deze verzameling weer groter is dan die $\mathcal{P}(A)$. We schrijven

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| =: \aleph_2.$$

Is het je nog niet groot genoeg, dan kun je dit herhalen zo vaak je wilt en vind je een oneindig rijtje soorten oneindig

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4 \ldots$$

Opgave 4.8. *We gaan bewijzen dat voor iedere verzameling A de cardinaliteit van A kleiner is dan de cardinaliteit van $\mathcal{P}(A)$. Het is opnieuw een bewijs uit het ongerijmde.*

Stel er is een correspondentie tussen A en $\mathcal{P}(A)$ zo dat bij elke verzameling $B \in \mathcal{P}(A)$ er een corresponderend element $b \in A$ is. We kijken naar een bijzondere verzameling $B \in \mathcal{P}(A)$:

$$B = \{\textit{Alle } c \in A \textit{ zo dat } c \textit{ niet in de corresponderende deelverzameling } C \subset A \textit{ zit}\}$$

Vanwege de aanname correspondeert met B een element $b \in A$.

De vraag nu is: zit b in B? Maak dit af tot een bewijs!

Opgave 4.9. *Gebruik Cantor's diagonaalargument om uit te leggen dat het interval $[0,1[$ overaftelbaar oneindig veel getallen bevat: $|[0,1[| = \aleph_1$. Hint: Herschrijf het argument met* *decimale getallen. Stel dus dat een aftelling is van deze getallen, bijvoorbeeld zoiets*

$$\begin{aligned}0,0000000\ldots\\0,1000000\ldots\\0,2000000\ldots\\0,3000000\ldots\\0,4000000\ldots\\ \textit{etc.}\end{aligned}$$

4.6 Antwoorden

Antwoord opgave 4.1

a) $\{d, e\}$

b) {positieve zesvouden}

c) $\emptyset$

Antwoord opgave 4.2

a) Bijvoorbeeld

$\Big\{\Big(b,$  $\Big), \Big(a,$  $\Big), \Big(c,$  $\Big)\Big\}$

b) Bijvoorbeeld $\{(a, a), (b, b), (c, d), (d, e)\}$

Antwoord opgave 4.3

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Antwoord opgave 4.4

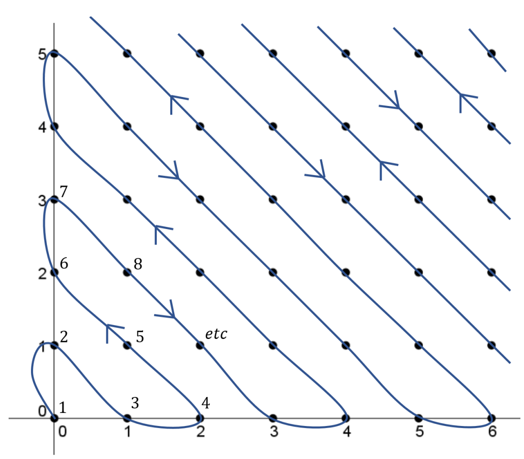
We bewijzen uit het ongerijmde. Stel $|\mathbb{N}| = n$ voor een natuurlijk getal n. Een natuurlijke correspondentie tussen $\mathbf{n}$ en $\mathbb{N}$ is

$$\{(\mathbf{1}, 1), (\mathbf{2}, 2), \ldots, ((\mathbf{n-1}), (\mathbf{n-1})), (\mathbf{n}, \mathbf{n})\}.$$

Maar dan hebben $n + 1, n + 2, \ldots$ in $\mathbb{N}$ geen correspondent in $\mathbf{n}$. Tegenspraak.

Antwoord opgave 4.5

Je maakt de 1-op-1 relatie door de punten langs te gaan langs het slangepad hieronder.



Antwoord opgave 4.7

a) Een 1 op positie n in de rij betekent dat n in de verzameling voorkomt. Een 0 betekent dat n niet in de verzameling voorkomt.

b) $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

c) De diagonaalmethode garandeert dat elk rijtje op tenminste 1 plek anders: rijtje k is op positie k anders.

Hoofdstuk 5

Afronding

Dit blok wordt afgerond met ofwel een schriftelijk zoals gebruikelijk, ofwel een werkstuk. Deze keuze is in eerste instantie voor je docent.

Schriftelijk examen

Het schriftelijk examen heeft een open karakter. Je krijgt opgaven die vergelijkbaar zijn met de opgaven in het boekje, maar iets anders van inhoud. Het kan dus gaan over een ander Babylonisch kleitablet of een fragment uit de Elementen; misschien iets over een reeks in zin de van Madhava, of een iets over verzamelingen en cardinaliteit. Je hoeft geen nieuwe wiskundige technieken te leren: wat je nodig hebt, heb je eerder geleerd en is waarschijnlijk in de boekje ook eerder langsgekomen.

Werkstuk

Als je een werkstuk maakt, dan zijn daarvoor de volgende aanwijzingen.

- Je werkstuk is op basis van een originele (primaire) bron. Deze bron en een gedeeltelijke vertaling is een centraal onderdeel van je werkstuk.
- Je werkstuk gaat vooral over de wiskunde in die originele bron. Je mag secundaire bronnen gebruiken met uitleg over de primaire bronnen, maar hiernaar moet uiteraard ook netjes in de tekst gerefereerd worden.
- Het werkstuk moet ongeveer 2500 woorden hebben exclusief referenties. Het hoeft eventueel maar over een paar regels uit de originele bron te gaan.
- De docent gaat uiteindelijk beoordelen wat je zelf gedaan hebt. Ga dus op zoek naar een project waarbij dat goed mogelijk is.

Suggesties:

- Een voor de hand liggende activiteit is een passage uit de Elementen te nemen als primaire bron.
- Een goede andere optie is de Aritmetica van Diophantus van ongeveer 270 CE. Dit zijn eigenlijk ook weer 13 “boeken”, net als de Elementen. Niet alle 13 boeken zijn bewaard gebleven. Hier gebeurt wel algebra! Je kunt een deel van de boeken hier in de Engelse vertaling vinden `https://archive.org/details/diophantusofalex00heatiala/mode/2up`. Er staan ook problemen in die je zelf zou kunnen oplossen.

- Zoek je het liever dichter bij huis, dan is Frans van Schooten misschien interessant: http://www.fransvanschooten.nl/fvs_boek.htm. In dit boek staan tal van oefeningen. Kun jij ze ook oplossen? Op de bijbehorende website http://www.fransvanschooten.nl/ is veel aanvullende informatie te vinden.
- Een ander Nederlands werk is van Christiaan Huygens: http://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/huygens/1660.pdf. Het gaat over kansrekening.
- Een ander enigszins toegankelijk werk voor leerlingen is La Geometrie van Descartes. Hier vind je het origineel en een vertaling: https://download.tuxfamily.org/openmathdep/geometry_analytic/The_Geometry-Descartes.pdf