

Wiskunde D Online 4 VWO Blok 2 - Grafen

Oefentoets - antwoorden

Opgave 1: Wielgrafen (2+2+2+2=8 punten)

De wielgraaf W_k is een graaf in de vorm van een circuit van k punten ($k > 1$) met daarbinnen een punt dat is verbonden met alle punten op het circuit.

- Leg uit dat de wielgraaf W_k een Hamiltongraaf is voor alle $k > 2$.
- Bepaal voor alle $k > 1$ het chromatisch getal van W_k .
- Hoeveel ononderbroken pennenstreken zijn nodig om W_k te tekenen?

Antwoorden:

- Een Hamiltoncircuit begint in het midden, doorloopt dan de k punten van het circuit en gaat daarna weer naar het midden.
- Het circuit met k punten kan met twee kleuren minimaal als k even is, en met drie kleuren minimaal als k oneven is. Het punten in het midden is met alle ander punten verbonden en moet dus met een andere kleur: +1. Dus het chromatisch getal is 3 als k even en 4 als k oneven.
- Er zijn k punten met oneven valentie 3 en één punt met valentie k . Als k even is, dan kan het dus met $\frac{k}{2}$ pennenstreken. Als k oneven is, dan met $\frac{k+1}{2}$ pennenstreken.

Opgave 2: Bomen en bos zien (2+4+4=10 punten)

We kennen de definitie van een *boom* als een samenhangende graaf zonder circuits. Laten we hier één voorwaarde uit weg, dan krijgen we de definitie van een *bos*: een *bos* is een graaf zonder circuits.

- Beredeneer dat een bos bestaat uit een of meerdere bomen.

Zij G een graaf met n punten en m lijnen (waarbij n en m positieve gehele getallen zijn). Stel dat G bovendien een bos is, bestaande uit k bomen (met k positief geheel).

- Bewijs dat $k = n - m$.

(Hint: voeg $k - 1$ lijnen toe om van het bos één boom te maken.)

Een bos heeft dus blijkbaar altijd meer punten dan lijnen ($n > m$).

- Is elke graaf met meer punten dan lijnen een bos?

Antwoorden:

- Een bos heeft één of meer samenhangscomponenten (maximale deelgrafien die wel samenhangen). Elk van de samenhangscomponenten is samenhangend en heeft geen circuits en is dus een boom.
- Dus m lijnen plus $k - 1$ lijnen geeft je een boom met $m + k - 1$ lijnen en n punten. Een boom met n punten heeft $n - 1$ lijnen. Dus $m + k - 1 = n - 1$, en daaruit volgt de gevraagde gelijkheid.
- Nee. De graaf kan bestaan uit twee punten, waarbij één punt een lusje heeft. Daarmee heeft dat punt een circuit, en is de graaf dus geen bos.

Opgave 3: Vliegen (4 punten)

Een vliegmaatschappij beschikt over een vloot van 5 vliegtuigen, elk van een verschillend type, en heeft 6 piloten in dienst. Het vliegbrevet van de piloten maakt het hen mogelijk slechts in een beperkt aantal typen te

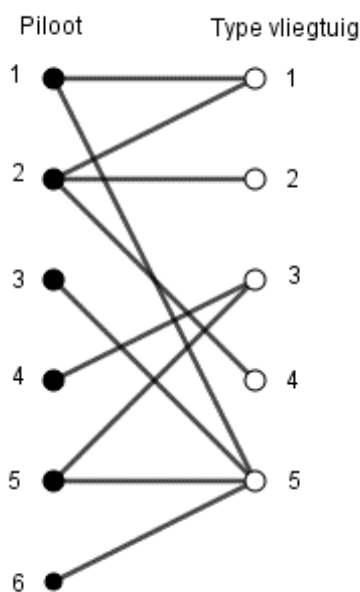
vliegen, zoals hieronder aangegeven.

- piloot 1 Type 1 en 5
- piloot 2 Type 1, 2 en 4
- piloot 3 Type 5
- piloot 4 Type 3
- piloot 5 Type 3 en 5
- piloot 6 Type 5

Hoeveel vliegtuigen kan de maatschappij maximaal tegelijkertijd laten vliegen? (Vertaal dit probleem eerst in een graaftheoretisch probleem)

Antwoord:

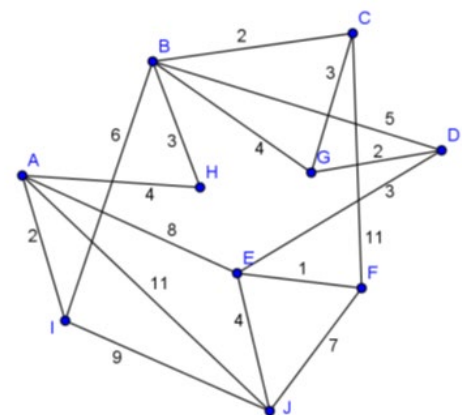
Het is een koppelprobleem en kan gemodelleerd worden met een tweeledige graaf:



Vervolgens de oplossing: Piloot 6 vliegt type 5, anders doet zij niets. Daarom vliegt piloot type 3, anders doet zij niets. Piloot 3 en 4 doen dan niets. Piloot 1 vliegt type 1, anders doet zij niets. En piloot 2 kan dan dus kiezen: type 2 of 4. Dat geeft dus maximaal vier vliegtuigen tegelijk.

Opgave 4: Opspannende boom (2+4=6 punten)

- a. Hoeveel lijnen moeten uit de nevenstaande boom weggelaten worden om een opspannende boom te krijgen? Licht toe!
- b. Bepaal een minimaal opspannende boom, met het algoritme van Prim of Kruskal. Geef je boom weer op de uitwerkbijlage. Geef je stappen weer.



Antwoorden:

- a. Er 17 lijnen en 10 punten. Een boom met 10 punten heeft 9 lijnen, dus er moeten 8 lijnen weg.

b. Het minimale gewicht is bij de volgende opspannende boom (in rood)

