Logica
Wiskunde D

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

Als dat het regent impliceert dat de straten nat zijn impliceert dat het regent,

dan regent het.

Benno van den Berg & Rogier Bos

Universiteit van Amsterdam
Institute for Logic, Language and Computation

Universiteit Utrecht
Freudenthal Instituut

Inhoudsopgave

Inleiding

Logica is de kunst van het *redeneren*. Maar wat is redeneren en waarom is dat belangrijk?

Redeneringen hebben tot doel om mensen te overtuigen. We stellen ons de volgende situatie voor. Een groep mensen deelt een bepaald aantal uitgangspunten: uitspraken die ze allemaal als waar beschouwen (of niet ter discussie willen stellen). Dan probeert één persoon binnen de groep de rest ervan te overtuigen dat ze ook een andere uitspraak als waar moeten beschouwen. Dat kan deze persoon doen door te proberen te beargumenteren dat deze uitspraak volgt uit de uitspraken die ze allemaal als uitgangspunt willen nemen.

Bijvoorbeeld: een politicus wil andere leden van haar politieke partij van een stelling overtuigen door te beargumenteren dat het niet zo kan zijn dat je deze stelling niet als waar aanmerkt, maar het partijprogramma wel. Of een medewerker van een bedrijf wil de andere leden van het bestuur overtuigen van de noodzaak om een fabriek te sluiten, uitgaande van een aantal stellingen waarover consensus bestaat.

In dit soort situaties is het interessant om te weten of het argument sluitend is: volgt de stelling werkelijk uit de uitgangspunten? Misschien zit er een gat in het argument? Of is het een drogredenering? Logica helpt je om redeneringen te analyseren en te bepalen of ze correct zijn. Als ze correct zijn, is dat natuurlijk prima; maar als het argument incorrect is, is dat goed om te weten en is het belangrijk om te kunnen aangeven waar het probleem zit. Het zal blijken dat het evalueren van redeneringen een zeker mechanisch aspect heeft. Zodra je de structuur van een redenering helder hebt, kun je het aan een computer overlaten om te controleren of de redenering klopt: echt begrip is dan niet meer nodig. Een ander doel van deze module is om je een idee te geven van hoe dat kan.

Het beoordelen van argumenten is ook belangrijk in de wiskunde. Dit komt omdat wiskundigen ook een club mensen met uitgangspunten zijn die elkaar van uitspraken proberen te overtuigen. In plaats van uitgangspunten spreken we over "axioma's" en de argumenten noemen we "bewijzen". Veel van het werk dat professionele wiskundigen doen is het proberen om bewijzen te vinden van bepaalde uitspraken. Dit komt omdat de wiskunde vol zit met uitspraken die verre van voor de hand liggend zijn: bijvoorbeeld "Er bestaan oneindig veel priemgetallen" en "De oppervlakte van een cirkel is πr^2". De vraag is: hoe komen wiskundigen hierbij? Wat heeft hen ervan overtuigd dat dit allemaal waar is? Waarom denk jij dat dit klopt?

Het antwoord is dat al deze uitspraken *bewezen* zijn. Dat wil zeggen dat je kunt laten zien dat dergelijk uitspraken die bepaald niet voor de hand liggen volgen uit een aantal basisprincipes die zelf nogal wiedes zijn. Je hebt dit als het goed is al in de meetkunde gezien: je bewijst dan uitspraken die verre van duidelijk zijn uit principes die veel meer voor de hand liggen.

Zo is de wiskunde een groot bouwwerk. Aan de basis liggen enkele evidente principes, waar de wiskundigen door de eeuwen heen, stapje voor stapje, steeds meer uitspraken uit hebben afgeleid die steeds minder voor de hand liggen, maar waarvan we wel weten dat ze waar moeten zijn, omdat ze streng logisch zijn bewezen.

In deze module leer je iets beter begrijpen hoe een bewijs werkt en hoe je een goed bewijs kunt herkennen. Hierdoor krijg je een beter beeld van hoe wiskunde in elkaar zit: het is geen verzameling rekenregeltjes die ooit een keer door een paar wijsneuzen zijn bedacht, maar het is een streng en zorgvuldig opgebouwde logische kathedraal. Hoe dat kan en welke gevolgen dat heeft, zie je in deze module.

Hoofdstuk 1. Introductie: redeneren in de wiskunde

Het woord "wis" in "wiskunde" verwijst naar weten (als in de verleden tijd "wist"). Maar wanneer weet je iets zeker?

Opgave 1.1. "$2 = 1$" – De inhoud van een redenering

Bekijk de volgende redenering

1)	$a = a$	(uitgangspunt)
2)	$a^2 = a^2$	(uit 1, keer a)
3)	$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$	(uit 2, min a^2)
4)	$(a + a)(a - a) = a(a - a)$	(ontbinden)
5)	$a + a = a$	(delen door $a - a$)
6)	$2a = a$	(uit 5)
7)	$2 = 1$	(delen door a)

Klopt dit? Weet je het zeker? Bij welke redeneerstap gaat het wellicht mis?

Zoals jullie weten is het bij wiskunde van groot belang dat je iedere reken- of redeneerstap kunt onderbouwen met een regel die je geleerd hebt. Doe je dat niet zorgvuldig genoeg dan ontstaan er foute conclusies zoals in het voorbeeld hierboven.

In opgave 1.1 gaat het inhoudelijk mist: delen door nul is flauwekul. Maar je wordt misleid omdat de vorm er goed uitziet.

Opgave 1.2. Natte jas en nieuwe iPhone

Bekijk de volgende redenering

1) Als het regent en ik geen paraplu bij me heb, dan krijg ik een natte jas
2) Het regent en ik krijg een natte jas
3) Dus: ik heb geen paraplu bij me

a. Waarom klopt deze redenering niet?

Hier ligt het probleem niet bij de inhoud. Kijk maar eens naar de volgende redenering.

1) Als ik in een Apple Store ben en ik sta niet rood op mijn bankrekening, dan koop ik de nieuwste iPhone.
2) Ik ben in een Apple Store en koop de nieuwste iPhone
3) Dus: ik sta niet rood op mijn bankrekening

b. Op welke manier is dit dezelfde redenering als de bovenstaande?
c. Klopt deze redenering dan ook niet?

We zeggen dat deze redeneringen dezelfde logische vorm hebben. We zullen in dit boekje ontdekken hoe de geldigheid van een redenering alleen van de logisch vorm afhangt.

Opgave 1.3. Wiskundige redeneringen

De volgende redenering bewijst dat er irrationale getallen c en d moeten bestaan met c^d rationaal. "Rationaal" betekent "te schrijven als breuk", zoals $\frac{3}{7}$ of $0{,}324$. "Irrationaal" betekent "niet te schrijven als breuk", bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ of π.

Redenering

1) Als $\sqrt{2}$ irrationaal is en $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is, dan is de propositie bewezen (met $c = \sqrt{2} = d$).

2) Als $\sqrt{2}$ irrationaal is, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationaal is, en $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rationaal is, dan is de propositie bewezen (met $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $d = \sqrt{2}$).

3) $\sqrt{2}$ is irrationaal

4) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ is rationaal

5) Dus de propositie is bewezen

Sommigen hebben moeite met de bovenstaande redenering. Waarom, denk je? Is de redenering geldig volgens jou?

Hoofdstuk 2. Logica en de kunst van het redeneren

Geldige redeneringen

In het vorige hoofdstuk heb je het belang van een geldige redenering (als bewijs van een stelling) in de wiskunde gezien. Het is dus essentieel om vast te kunnen stellen of een redenering geldig is. Hieronder staan enkele informele criteria waarmee je redelijkerwijs zou kunnen nagaan of een redenering geldig is.

Wat is een *geldige* redenering?

- Kun je de conclusie redelijkerwijs ontkennen als je de premissen accepteert? Nee? Dan geldig
- Is het voorstelbaar (is er een scenario denkbaar) dat de premissen waar zijn, maar de conclusie niet? Nee? Dan geldig
- Is de conclusie onvermijdelijk waar als de premissen waar *zouden* zijn? Ja? Dan geldig

Opgave 1. Welk van de volgende redeneringen zijn geldig en welke niet?

1. Emma drinkt koffie of thee.
   Emma drinkt geen thee.
   Dus: Emma drinkt koffie.
2. Henk verkoopt zijn aandelen Philips als ze verder dalen.
   Henk verkoopt zijn aandelen Philips niet.
   Dus: De aandelen Philips zijn niet gedaald.
3. Als er toetje is, dan is er vla of yoghurt.
   Er is geen yoghurt.
   Dus: Er is geen toetje.
4. Als het zaterdag is, eten we pannenkoeken.
   Het is zondag.
   Als het zondag is, is het geen zaterdag.
   Dus: We eten geen pannenkoeken.
5. Het kan niet zo zijn dat het regent en de zon schijnt.
   De zon schijnt.
   Dus: het regent niet.
6. Alleen als de zon schijnt gaat het terras open.
   Het terras is open.
   Dus: de zon schijnt.

Opgave 2.

We kijken naar de zinnen uit de vorige opgave.

1. Verandert de (on)geldigheid van deze redenering in 1 als je "Emma" door "Johan" vervangt?
2. Verandert de (on)geldigheid van deze redenering in 2 als je "Philips" door "Google" vervangt?
3. Verandert de (on)geldigheid van de redenering in 3 als je "of" door "en" vervangt?
4. Verandert de (on)geldigheid van de redenering in 4 als je "pannenkoek" door "macaroni" vervangt?
5. Verandert de (on)geldigheid van de redenering in 5 als je "niet" door "wel" vervangt?
6. Verandert de (on)geldigheid van de redenering in 6 als het je het woord "alleen" weglaat?

Conclusie: Blijkbaar is de inhoud van de zinnen niet van belang, maar hoe ze door "en", "of", "niet" aan elkaar worden geknoopt wel. Dat noemen we de *vorm* van de redenering.

De **vorm** van de eerste redenering (in opgave 1.1) is:

p of q
niet q
Dus: p

waarbij p staat voor "Emma drinkt koffie" en q staat voor "Emma drinkt thee". Maar dat laatste hoef je niet te weten om te kunnen inzien dat de redenering geldig is.

Opgave 3. Bepaal van de volgende abstracte redeneringen of ze geldig zijn of niet.

1. p of q.
   Als p, dan q.
   Dus: q
2. Niet zowel p als q.
   p.
   Dus: niet q.
3. p of q.
   p. Dus: q.
4. Alleen als p, dan q.
   Niet q.

Dus: niet p.

In plaats van “en” gebruiken we het symbool $\wedge$
In plaats van “of” gebruiken we het symbool $\vee$
In plaats van “niet” gebruiken we het symbool $\neg$
In plaats van “als …, dan …” gebruiken we het symbool $\rightarrow$
In plaats van “dus” gebruiken we het symbool $\therefore$

Opgave 4. Bepaal van de volgende abstracte redeneringen of ze geldig zijn of niet.

1. $p \rightarrow q$.
   p.
   $\therefore q$.
2. $p \vee \neg q$.
   q.
   $\therefore p$.
3. $p \rightarrow (q \wedge r)$
   $\neg q$.
   $\therefore \neg p$.

Opgave 5.

a) Wat vind je van de volgende redeneringen? Zijn ze geldig, denk je?

1. $p \rightarrow q$
   p
   $\therefore q$
2. $p \rightarrow q$
   q
   $\therefore p$
3. q
   $\therefore p \rightarrow q$
4. $\neg p$
   $\therefore p \rightarrow q$
5. p
   $\neg q$
   $\therefore \neg(p \rightarrow q)$

We kunnen ons voorstellen dat je niet alle antwoorden even voor de hand liggend vindt: vooral bij onderdeel 3 en 4. Hier wijkt het gebruik van “als …dan …” in de wiskunde en logica enigszins af van het alledaagse gebruik. In plaats van “als …dan …” zegt men bij $p \to q$ ook wel “p impliceert q”, en het teken “→” heet de *implicatie*.

Logische equivalentie: twee uitspraken die uit elkaar volgen noemen we *equivalent*. We geven dit aan door ≡. Je mag $p \equiv q$ dus concluderen uit $p \therefore q$ en $q \therefore p$.

Opgave 6. Zijn de volgende uitspraken waar?

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
3. $p \to q \equiv q \to p$.
4. $\neg\neg p \equiv p$.

Vertalen naar propositielogica

In opgaven 1 en 3 keken we naar de redenering

Emma drinkt koffie of thee.
Emma drinkt geen thee.
Dus: Emma drinkt koffie.

Die redenering kan worden vertaald naar

$p \vee q$
$\neg q$
$\therefore p$

Waarbij de uitleg

p staat voor “Emma drinkt koffie”
q staat voor “Emma drinkt thee”

de **vertaalsleutel** wordt genoemd. Dit vertalen is een belangrijke stap, waarbij de focus van de inhoud naar de vorm van de redenering verschuift.

Opgave 7. Vertaal de volgende zinnen in de taal van de propositielogica en geef ook de vertaalsleutel.

1. We eten vanavond spinazie of andijvie.
2. Emma heeft een kat of een hond.
3. Als Ajax geen kampioen wordt, dan wordt Feyenoord kampioen.

4. Mits de kantine open is, kun je een ijsje kopen.

Opgave 8. Vertaal elk van de redeneringen in opgave 1.

Opgave 9. In het alledaagse leven wordt "of" op twee manieren gebruikt: *inclusief* als je de mogelijkheid wilt open laten dat beide opties ook ok zijn; *exclusief* als je dat wilt uitsluiten. Wat denk je? Wordt in de volgende zinnen "of" inclusief of exclusief gebruikt en wat is het verschil?

1. Mensen die ouder zijn dan 60 of in een risicogroep vallen komen in aanmerking voor vaccinatie.
2. Je kunt een stuk appeltaart of een muffin bij de koffie krijgen.
3. Jan gaat wiskunde of natuurkunde studeren.
4. Je kunt de route via Amersfoort of Lelystad nemen.

> In de logica en wiskunde wordt "of" altijd *inclusief* gebruikt: dus "$p \vee q$" wordt ook als waar beschouwd als p en q beide waar zijn.

Vertalen is niet altijd even simpel. We geven een voorbeeld:

Je eet je witlof op of je doet het niet, als je maar ophoudt met zaniken

Hoewel er *als* in de zin staat, heeft de zin niet de betekenis dat er aan een voorwaarde voldaan moet zijn. De vertaling is $(e \vee \neg e) \wedge o$, met e "Je eet je witlof op" en o "je houdt op met zaniken". Die vertaling is wel logisch equivalent met o, maar dat is geen weergave van wat er in de zin gezegd wordt.

Opgave 10. Geef van de volgende zinnen de vertaling, inclusief een vertaalsleutel.

a) *Alleen als de midvoor op dreef is kunnen we van Feyenoord winnen.*

b) *Om RBC te kunnen verslaan is het voldoende dat de midvoor op dreef is*.

c) *Om van Feyenoord te kunnen winnen is het nodig dat de midvoor op dreef is*

d) *Je mag de dieren niet voederen of aaien.*

e) *Doe de mensen beloften, en ze stemmen op je.*

f) *Mark gaat naar school tenzij hij naar de dokter moet.*

g) *Een driehoek is gelijkbenig mits hij twee gelijke hoeken heeft.*

h) *Je mag de disco in mits je een kaartje koopt*.

Je merkt dat bij vertalen in propositielogica soms nuances verloren gaan. Maar de aspecten die alleen waarheid en onwaarheid betreffen worden goed weergegeven.

Hoofdstuk 3. Waarheidstafels

Waarheid, geldigheid en tegenvoorbeelden

Opgave 1. Bekijk de volgende uitspraken.

a) De regering van een land zetelt altijd in de hoofdstad.

b) Alle vogels kunnen vliegen.

c) Alle groente is groen.

Ze zijn allemaal onwaar. Zo zijn wortels groente die niet groen zijn. Daarmee is een wortel een *tegenvoorbeeld* voor de derde uitspraak. Kun je ook tegenvoorbeelden voor de andere uitspraken vinden?

Als een uitspraak over een verzameling gaat, dan is een *tegenvoorbeeld* een concreet element uit de verzameling waarvoor de uitspraak niet geldt. Daarmee toon je aan dat de uitspraak *onwaar* is.

Opgave 2. Bekijk de volgende uitspraken. Vind voor elk een tegenvoorbeeld.

a) Als $a < c, b < c, d < c, a < d$, dan $b < d$.

b) Uit $a^2 = b$ volgt $a \leq b$.

c) Voor elke $a, b, c \in R$, heeft een vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ een oplossing voor x.

d) Als $a \neq b$, dan ook $a^b \neq b^a$.

Naast de (on)waarheid van uitspraken, kun je ook naar de (on)geldigheid van redeneringen kijken. Dat doen we in de volgende opgaven.

Opgave 3. Bekijk de volgende redenering:

> Er is alleen nog vla en yoghurt. Eva neemt geen vla. *Dus:* Eva neemt geen toetje.

Deze redenering is niet geldig: het is namelijk voorstelbaar dat Eva yoghurt neemt (en geen vla). In dit scenario zijn alle premissen waar en de conclusie niet. Daarmee is dit scenario een tegenvoorbeeld voor de redenering. Kun je scenario's bedenken die laten zien dat de volgende redeneringen niet geldig zijn?

a) Als Frits een miljoen euro heeft en zijn auto gaat stuk, dan koopt hij een Bugati Veyron. Frits' auto gaat stuk. *Dus:* Frits koopt een Bugati Veyron.

b) Als Frits een miljoen euro heeft en zijn auto gaat stuk, dan koopt hij een Bugati Veyron. Frits' auto gaat stuk. *Dus:* Frits koopt geen Bugati Veyron.

c) Als het regent of sneeuwt, dan gaat Fjodor niet naar buiten. Fjodor gaat niet naar buiten. Het regent niet. *Dus:* het sneeuwt.

Een redenering is *ongeldig* als er een scenario bestaat—dat wil zeggen een keuze van waar/onwaar voor de afzonderlijke bouwstenen in de redenering—waarmee de premissen waar zijn, maar de conclusie niet. Zo'n scenario is dan een *tegenvoorbeeld* voor de redenering.

Opgave 4. Bekijk de volgende redenering:

Mozart is voor Beethoven geboren.
Mozart schrijft zijn Jupitersymfonie voordat Beethoven sterft.
Dus: De Jupitersymfonie is na de geboorte van Beethoven geschreven.

Om te kijken of deze redenering geldig is schrijven we GB, GM voor de jaartallen waarin Beethoven en Mozart geboren zijn, SB, SM voor de jaartallen waarin ze gestorven zijn en J voor het jaar waarin Mozart zijn Jupitersymfonie schrijft (we zullen aannemen dat ze allemaal verschillend zijn). Deze zes gebeurtenissen hadden bijvoorbeeld in de volgorde

$$GB < GM < SB < J < SM$$

kunnen plaatsvinden (dus dan wordt eerst Beethoven geboren, dan Mozart, waarna Beethoven sterft, *et cetera*). In deze opgave noemen we zo'n ordening van deze 5 gebeurtenissen een scenario.

a) In totaal zijn er 10 scenario's. Kun je ze allemaal in een tabel zoals hieronder opschrijven? De eerste regel in de tabel staat voor het scenario $GB < GM < SB < J <$ $< SM$. (En houd er rekening mee dat iemand eerst moet worden geboren voor die kan sterven!)

	Volgorde					Premissen waar?	Conclusie waar?
1	GB	GM	SB	SH	SM	nee	ja
2							
3							
Etc.							

b) In welke scenario's zijn alle premissen waar en in welke scenario's de conclusie?

c) Is de redenering geldig volgens jou? Hoe blijkt dat uit de tabel?

Waarheidstafels

Wanneer je de vorm van een uitspraak of redenering hebt vastgesteld door een vertaling (zoals in het vorige hoofdstuk), dan kun je vervolgens de waarheid of geldigheid ervan onderzoeken, zonder je om de inhoud te bekommeren.

Opgave 5. Stel p is waar, q is onwaar en r is waar.

a) Is $p \wedge q$ waar?

b) En $p \wedge \neg q$?

c) En $p \rightarrow q$?

d) En $p \wedge (q \wedge r)$?

e) En $p \wedge (q \vee r)$?

Je ziet dat je deze vragen kunt beantwoorden zonder te weten waar p, q, r voor staan! Dit kun je ook doen voor alle verschillende mogelijkheden van waar of onwaar voor p, q en r. Dit kun je makkelijk ordenen in een tabel.

Opgave 6.

Maak de volgende tabel verder af. De eerste regel zegt dat als p and q beide onwaar zijn, dat dan $p \wedge q$ ook onwaar is.

p	q	$p \wedge q$
onwaar	onwaar	onwaar
onwaar	waar	…
waar	onwaar	…
waar	waar	…

Opgave 7. In plaats van onwaar schrijven we in de logica 0 en voor waar schrijven we meestal een 1. Maak de volgende tabellen ook verder af.

p	q	$p \vee q$
0	0	…
0	1	…
1	0	…
1	1	…

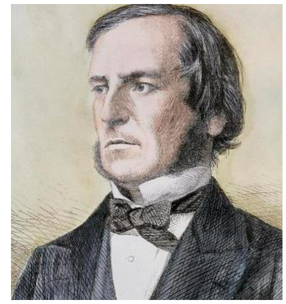
en

p	$\neg p$
0	…
1	…

Dit soort tabellen zijn een formele vorm van de scenario's zoals we eerder bespraken.

De tabellen als hierboven, waarbij systematisch mogelijkheden voor waar en onwaar voor een lijst premissen $(p, q, r, ...)$ en een conclusie, worden *waarheidstafels* genoemd. Waar of onwaar (0 of 1) worden de *waarheidswaardes* genoemd. In de informatica (en verschillende programmeertalen) spreken we ook wel van de *booleans*, naar George Boole.

George Boole (1815 - 1864) was een Brits wiskundige en logicus. Vanaf 1849 was hij hoogleraar in de wiskunde in de Ierse stad Cork. Als uitvinder van de boolse logica wordt Boole achteraf beschouwd als een van de grondleggers van de computerwetenschap. Zijn zogenaamde booleaanse algebra's, een vorm van symbolische logica, worden op diverse plaatsen in de wiskunde gebruikt en vinden toepassing bij het ontwerpen van computerchips. (Bron: Wikipedia)



Opgave 8. In de logica, wiskunde en informatica wordt de waarheidstafel voor implicatie als volgt ingevuld.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Naar onze mening is dit net zoiets als de kwantummechanica: als je het begrijpt, dan heb je het niet begrepen.[1]

a) Wat vind je van de derde regel?

b) De tafel zegt dat als p onwaar is, dat dan $p \to q$ waar is. Wat vind je daarvan? Is de uitspraak "Als de maan van kaas gemaakt is, dan landen morgen de maanmannetjes om al onze kaas te stelen." volgens jou waar?

c) De tafel zegt dat als q waar is, dat dan $p \to q$ waar is. Wat vind je daarvan? Is de uitspraak "Als Napoleon in Waterloo verloren heeft, dan blijft hout drijven." waar?

Filosofische reflectie. In de wiskunde gebruiken we de implicatie ($p \to q$) *waarheidsfunctioneel*; dat wil zeggen dat we aan $p \to q$ een waarheidswaarde willen toekennen zuiver en alleen op basis van de waarheidswaardes van p en q; dus zonder meer inhoudelijke overwegingen te maken zoals: hebben p en q wel iets met elkaar te maken en hoe zinnig zijn p en q? De manier waarop logici de tabel invullen kun je het beste als volgt onthouden: als p waar en q onwaar is, dan is $p \to q$ onwaar (dat lijkt ons niet zo discutabel). *In alle andere gevallen is $p \to q$ waar.* Dus $p \to q$ betekent hetzelfde als $\neg(p \wedge \neg q)$. Dus in de logica beschouwen we $p \to q$ als waar, tenzij p waar is en q niet.

[1] Richard Feynman zou gezegd hebben: "if you think you understand quantum mechanics, then you don't." Alhoewel de kwantummechanica nog mysterieuzer dan de implicatie is.

Opgave 9. In deze opgave oefen je met de waarheidswaarde van de implicatie. Stel p is waar, q is onwaar en r is waar.

a) Is $q \to p$ waar?

b) En $(p \to q) \wedge (q \to p)$?

c) En $r \to (p \to q)$?

d) En $\neg\big(p \to (q \wedge (r \to \neg p))\big)$?

> De letters $p, q, r, \ldots$ zoals ze hierboven gebruikt worden *propositieletters* genoemd. Een keuze van een waarheidswaarde (waar of onwaar, 1 of 0) voor de propositieletters heet een *interpretatie*.

Opgave 10. In de volgende waarheidstafel hebben we al de waarheidswaarde van $(p \vee r) \wedge (\neg q \to r)$ ingevuld voor de interpretatie die alle propositieletters onwaar maakt en voor de interpretatie die p en q onwaar maakt, maar r waar. Vul de overige lege plekken in.

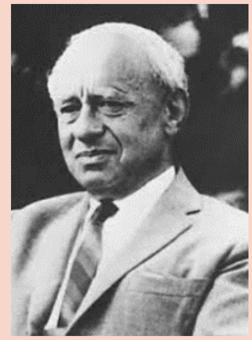
p	q	r	$p \vee r$	$\neg q$	$\neg q \to r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \to r)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Opgave 11.

a) Bereken de waarheidstafels van $(p \wedge \neg q) \vee (p \to q)$ en $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

b) Wat valt op aan de uitkomsten? Wat zeggen die volgens jou over de formules?

Als een formule onder iedere interpretatie waarheidswaarde 1 geeft, dan wordt die formule een *tautologie* of een *logische waarheid* genoemd (bv. $p \to p$); dat wil zeggen dat de uitspraak/formule waar is ongeacht de inhoud van de uitspraken p en q. Soms kun je de waarheid van een zin vaststellen aan de hand van de logische structuur en soms moet je daarvoor weten hoe de wereld in elkaar zit. Om dat laatste te formuleren, gaf de Poolse logicus Alfred Tarski in 1935 een definitie van "waar", die beroemd is geworden: "p" is waar als p. Bijvoorbeeld, "Sneeuw is wit" is waar als sneeuw wit is. Of de zin "p" waar is, is dus precies afhankelijk van de inhoud van de zin.



Heeft een formule onder iedere interpretatie waarheidswaarde 0, dan wordt die formule een *contradictie* of een *logische onwaarheid* genoemd (bv. $p \wedge \neg p$).

Je kunt waarheidstabellen ook maken voor redeneringen, met premissen en een conclusie.

Opgave 12. In deze opgave bekijken we de volgende redenering: premissen zijn $p \vee q$ en $q \to r$ en de conclusie is $p \wedge r$. Zoals je hopelijk nog uit het vorige hoofdstuk weet, geven we dit symbolisch zo weer: $p \vee q, q \to r \therefore p \wedge r$.

a) Vul de volgende waarheidstafel verder in.

p	q	r	$p \vee q$	$q \to r$	$p \wedge r$
0	0	0	0	1	0
0	0	1			
0	1	0			

Etc.

b) Is er een interpretatie waaronder de premissen waar zijn en de conclusie niet?

c) Is de redenering geldig, denk je?

Of een redenering geldig is kun je afleiden uit de vorm (verkregen door vertaling). Als in de waarheidstafel een interpretatie van de propositieletters voorkomt waarvoor de premissen waar zijn, maar de conclusie onwaar, dan hebben we een tegenvoorbeeld en is de redenering ongeldig. Bestaat zo'n tegenvoorbeeld niet, dan is de redenering geldig.

Opgave 13. Bekijk nu de redenering $p \to q, r \to (p \wedge \neg q) \therefore \neg r$.

a) Vul de volgende waarheidstafel in.

p	q	r	$p \to q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \to (p \wedge \neg q)$	$\neg r$
0	0	0					

Etc.

b) Is de redenering geldig?

Als een redenering geldig volgens de waarheidstabel, dan schrijven we $\vDash$ in plaats van $\therefore$ Bijvoorbeeld, voor $p \to q, r \to (p \wedge \neg q) \therefore \neg r$ is dit zo en het kan dus geschreven worden als $p \to q, r \to (p \wedge \neg q) \vDash \neg r$. Dit is overigens equivalent met dat de uitspraak $(p \to q) \wedge (r \to (p \wedge \neg q)) \to \neg r$ een tautologie is.

Opgave 14. Bekijk de volgende redenering:

Als we op vakantie gaan, gaan we naar Frankrijk of Italië.
We gaan niet op vakantie naar Frankrijk.
Dus: Als we niet naar Italië gaan, gaan we niet op vakantie.

a) Zet de premissen en de conclusie om naar formules in de propositielogica.

b) Onderzoek met behulp van een waarheidstafel of deze redenering geldig is.

Opgave 15.

a) Bereken de waarheidstafels van de formule

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

en van

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

b) Valt je iets op?

c) Welke formule heeft de volgende waarheidstafel?

p	q	r	??
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

d) Bestaat er ook een kortere formule met deze waarheidstafel (dan het "recept" uit opgave a suggereert)?

e) Bestaat er bij iedere waarheidstabel een bijbehorende formule?

Opgave 16.

a) Hoeveel regels heb je nodig in een waarheidstafel om een redenering te testen waarin propositieletters p, q, r voorkomen?

b) Geef dan een formule voor het aantal interpretaties, als je n propositieletters hebt.

Opgave 17. In deze opgave kijken we naar de volgende redenering: "Als ik een grote tuin en 50.000 euro heb, dan bouw ik een zwembad" is equivalent aan "als ik een grote tuin heb, dan bouw ik een zwembad, of als ik 50.000 euro heb, dan bouw ik een zwembad".

a) Vertaal deze zin.

b) Onderzoek de geldigheid van de equivalentie.

De implicatie naar rechts is verrassend. De waarheidstabellen laat niet zien welke redenering achter zo'n uitspraak zou kunnen zitten. In het volgende hoofdstuk zie je dat daar een bewijs uit het ongerijmde voor nodig is. Misschien geeft deze opgave een indruk waarom deze redeneerstap door sommige wiskundigen wordt afgewezen.

Conclusie: In een waarheidstafel zoeken we systematisch naar een interpretatie ("scenario") waaronder de premissen waar zijn, maar de conclusie niet. Vinden we zo'n interpretatie, dan is de redenering ongeldig; bestaat zo'n interpretatie niet, dan is de redenering geldig. Dus met de waarheidstafels bereiken we twee dingen. In de eerste plaats geeft het een precieze wiskundige manier om geldigheid van een redenering te definiëren: waar we in het vorige hoofdstuk meer een gevoel voor geldigheid probeerden te ontwikkelen, heeft geldigheid nu een precieze wiskundige betekenis gekregen. In de tweede plaats zijn de waarheidstafels niet alleen een definitie, maar stellen ze ons ook in staat om uit te rekenen of redeneringen geldig zijn of niet.

Opgave 18. In hoofdstuk 1 bekeken we de volgende redenering, die bewijst dat er irrationale getallen c en d moeten bestaan met c^d rationaal.

Redenering

1) Als $\sqrt{2}$ irrationaal is en $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is, dan is de propositie bewezen (met $c = \sqrt{2} = d$).

2) Als $\sqrt{2}$ irrationaal is, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationaal is, en $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rationaal is, dan is de propositie

bewezen (met $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $d = \sqrt{2}$).

3) $\sqrt{2}$ is irrationaal

4) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ is rationaal

5) Dus de propositie is bewezen

a) Ga na dat $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ rationaal is.
b) Vertaal deze redenering met onderstaande vertaalsleutel

p staat voor "$\sqrt{2}$ is rationaal"
q staat voor "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal"
r staat voor "$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ is rationaal"
s staat voor "er bestaan irrationale getallen c en d met c^d rationaal"

c) Onderzoek de geldigheid van de redenering met behulp van een waarheidstabel.

Hoofdstuk 4. Natuurlijke deductie

In het vorige hoofdstuk kwam een methode aan bod om na te gaan of een redenering geldig was. Met behulp van een waarheidstabel ging je na of er geen tegenvoorbeelden waren, dat wil zeggen, interpretaties waarbij de premissen waar zijn, maar de conclusie niet. Zonder tegenvoorbeelden was de redenering geldig. Maar hoe kom je uit op een geldige redenering? In dit hoofdstuk stellen we afleidingsregels voor het redeneren op, regels die stellen hoe je een redenering mag opbouwen, die zouden moeten garanderen dat het uiteindelijk bouwwerk geldig is.

Voor het redeneren met $\wedge$ zijn er drie afleidingsregels:

1. uit $\varphi \wedge \psi$, mag je concluderen φ ($\wedge\boldsymbol{E}$)
2. uit $\varphi \wedge \psi$, mag je concluderen ψ ($\wedge\boldsymbol{E}$)
3. uit φ en ψ, mag je concluderen $\varphi \wedge \psi$ ($\wedge\boldsymbol{I}$)

We gebruiken nu Griekse letters φ (phi) en ψ (psi), en niet p, q en r zoals voorheen. Dat doen we, omdat de letters φ en ψ niet langer propositieletters zijn, maar kunnen staan voor hele formules, zoals bijvoorbeeld $p \rightarrow (p \wedge q)$.

Met de regels hierboven kun je het moeilijk oneens zijn, en dat is precies de bedoeling. De dikgedrukte codes achter de regel staan voor $\wedge$***E***liminatie en $\wedge$***I***ntroductie. Je kunt nu heel formeel volgens de regels uit $p \wedge q$ afleiden dat $q \wedge p$. Dat schrijf je zo op:

1	$p \wedge q$	
2	p	$\wedge\boldsymbol{E}$, 1
3	q	$\wedge\boldsymbol{E}$, 1
4	$q \wedge p$	$\wedge\boldsymbol{I}$, 2,3

Boven de horizontale lijn staat een aanname. De tekst "$\wedge\boldsymbol{E}$, 1" betekent dat $\wedge$-eliminatie is toegepast met betrekking tot de $\wedge$ in regel 1.

Met waarheidstafels wisten we al dat deze redenering geldig was, maar nu hebben we dus ook een geldige afleiding: een afleiding volgens onze regels voor de $\wedge$. Uiteraard kunnen we meer regels opstellen voor redeneren met de anderen logische symbolen, maar eerst maar eens oefenen met deze drie regels.

Opgave 1. In deze opgave ga je uit $(p \wedge q) \wedge r$ afleiden dat $p \wedge (q \wedge r)$. Het begint zo

1	$(p \wedge q) \wedge r$	
2	$p \wedge q$	$\wedge\boldsymbol{E}$, 1
3	r	$\wedge\boldsymbol{E}$, 1
4	...	...

Maak de afleiding verder af met gebruik van de regels.

Let op: er zijn altijd verschillende afleiding mogelijk, dus verwerp jouw afleiding niet meteen als die niet hetzelfde is als bij onze modelantwoorden.

Een afleiding van een uitspraak met behulp van introductie en eliminatie-regels heet een *natuurlijke deductie*. Hieronder bespreken we introductie- en eliminatieregels voor de implicatie $\rightarrow$ en voor de negatie $\neg$. Als je uit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ kan afleiden dat ψ, dan schrijven we $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$. Let op het verschil tussen "$\vdash$" en "$\vDash$". Dat laatste teken gebruiken we als een redenering geldig is bevonden met behulp van waarheidstafels.

Implicatie: eliminatie en introductie

Vervolgens geven we afleidingsregels voor de implicatie.

Voor het redeneren met $\rightarrow$ zijn er twee afleidingsregels:

a) Uit φ en $\varphi \rightarrow \psi$, mag je concluderen ψ ($\rightarrow$ ***E***)
b) Als je uit de aanname φ kunt afleiden ψ, dan mag je concluderen $\varphi \rightarrow \psi$ ($\rightarrow$ ***I***)

Opgave 2. Leidt uit p, q en $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ af dat r.

Als je een aanname doet tijdens een afleiding, dan geef je dat aan door in te springen in de tabel. Bijvoorbeeld, we leiden als volgt uit q af dat $p \rightarrow (p \wedge q)$.

1	q		premisse
2		p	aanname
3		q	herhaling
4		$p \wedge q$	$\wedge$ ***I***, 2,3
5	$p \rightarrow (p \wedge q)$		$\rightarrow$ ***I***, 2-4

In regel 1 staat de premisse voor de afleiding. Op regel 2 nemen we aan dat p en springen we een kolom in, om ons te helpen herinneren dat we een extra aanname hebben gedaan. In regel 3 herhalen we regel 1, en halen we q daarmee binnen de deelredenering van regel 2 tot 4. In regel 4 gebruiken we en-introductie. In regel 5 gebruiken we de implicatie-introductie op basis van dat we de uitkomst in regel 4 hebben afgeleid uit de aanname in regel 2. Nu kunnen we een kolom terug naar links, omdat de uitspraak op regel 5 niet meer van de aanname afhangt. Conclusie: $q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$.

Meestal is er geen verwarring mogelijk, en dan laten we een herhaling, zoals in regel 3, weg.

1	q		premisse
2		p	aanname
3		$p \wedge q$	$\wedge$ ***I***, 1,2
4	$p \rightarrow (p \wedge q)$		$\rightarrow$ ***I***, 2,3

Opgave 3. In deze opgave willen we met natuurlijke deductie laten zien dat

$$p \to q, r \ \vdash p \to (q \land r).$$

a) Neem de volgende tabel over en laat voldoende ruimte over

1	$p \to q$		premisse
2	r		premisse
3		p	aanname
4			
	$p \to (q \land r)$		

De conclusie staat al klaar. Omdat we een implicatie uit p moeten afleiden, staat ook de aanname p al klaar.

b) In regel 4 leid je uit p af dat q. Gebruik de juist regel.
c) Maak het natuurlijke deductie in de tabel verder af.
d) Ga met een waarheidstabel na dat ook $p \to q, r \ \vDash p \to (q \land r)$.
e) Geef een voorbeeld van een redenering waarvan dit de vertaling is.

Opgave 4. Geef een natuurlijke deductie van

a) $p \to q, q \to r \vdash p \to r$
b) $p \to (q \to r) \vdash (p \land q) \to r$
c) $(p \land q) \to r \vdash \ p \to (q \to r)$ (hiervoor gebruik je nog een extra kolom: je doet tweemaal een aanname)

Via natuurlijke deductie volgt dus dat $(p \land q) \to r$ en $p \to (q \to r)$ equivalent zijn.

d) Ga ook met een waarheidstabel na dat $(p \land q) \to r \equiv \ p \to (q \to r)$.

Falsum en negatie afleidingsregels

De volgende stap is dat we natuurlijke deductie uitbreiden met regels voor negatie $\neg$. Dat doen we door een nieuw symbool aan onze calculus toe te voegen: $\perp$ (Latijn: *falsum*), wat staat voor *tegenspraak*. Falsum, $\perp$ is de uitspraak die altijd onwaar is. Met falsum laten de regels voor negatie zich als volgt formuleren:

Voor het redeneren met $\neg$ zijn er twee afleidingsregels: a) Als de aanname φ tot een tegenspraak $\perp$ leidt, mag je $\neg\varphi$ concluderen ($\neg$***I***) b) Uit φ en $\neg\varphi$ mag je tegenspraak $\perp$ concluderen ($\neg$***E***)

Als voorbeeld geven we een natuurlijke deductie van $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$.

1	$p \to q$			Premisse
2		$\neg q$		Aanname
3			p	Aanname
4			q	$\to \boldsymbol{E}$, 1,3
5			$\bot$	$\neg \boldsymbol{E}$, 2,4
6		$\neg p$		$\neg \boldsymbol{I}$, 3,5
7	$\neg q \to \neg p$			$\to \boldsymbol{I}$, 2-6

Tijd om het zelf te proberen!

Opgave 5. Geef natuurlijke deducties voor

a) $\vdash \neg(p \land \neg p)$
b) $\neg(p \land q) \vdash p \to \neg q$
c) $\neg(p \to q) \vdash \neg q$

Tot slot een belangrijke regel met betrekking tot falsum:

Ex falsum quodlibet: Uit $\bot$ kun je elke uitspraak φ concluderen (**EFQ**)

Oftewel, uit falsum kun je alles concluderen.

Als een theorie het toelaat falsum af te leiden, dan volgt met EFQ dat je theorie een groot probleem heeft: *elke* uitspraak is waar volgens de theorie. Een theorie waaruit falsum niet kan worden afgeleid heet *consistent*. Het zou heel mooi zijn als je zou kunnen bewijzen van een theorie dat die consistent is. Dat blijkt een heikel punt en er is uitgebreid wiskundig onderzoek naar gedaan in de 20ste eeuw, en het staat nog steeds onder de aandacht.

Bewijs uit het ongerijmde

Een belangrijk principe in de wiskunde is dat je een uitspraak kunt bewijzen door te laten zien dat de negatie van de uitspraak tot een tegenspraak leidt. Dat wil zeggen:

Als uit $\neg\varphi$ volgt $\bot$, dan mag je φ concluderen (**RAA**)

Dit noemen een bewijs uit het ongerijmde; in het Latijn reductio ad absurdum (RAA).

Opgave 6. In deze opgave bekijken we een voorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde. Stel een spel heeft twee spelers die om beurten een zet doen. Stel bovendien dat het spel altijd eindigt na een eindig aantal zetten met winst voor één van beiden.

a) Waarom voldoet schaken niet aan deze voorwaarden? En waarom vier op een rij niet? Ken je een spel dat wel aan deze voorwaarden voldoet?

Een voorbeeld van zo'n spel is Chomp. Je kunt dat spelen via deze link. Je speelt Chomp met een rooster (een stuk chocola) van bijvoorbeeld 4 bij 7 vierkantjes. Spelers wijzen om en om een (nog niet verwijderd) veld aan en verwijderen dat veld (eten de chocola) en alle andere velden die daar rechts en boven liggen. Dus als je (a, b) aanwijst, verwijder je alle (x, y) met $x \geq a$ en $y \geq b$. De speler die het laatste veld verwijdert, verliest.

b) Speel het spel en stel vast dat het nog niet zo eenvoudig is een winnende strategie te vinden.
c) Ga na dat Chomp wel aan bovenstaande voorwaarden voldoet.

De stelling van Zermelo stelt dat er voor spellen die aan deze voorwaarden voldoen een winnende strategie moet bestaan voor één van de spelers.

d) Leg uit dat uit de stelling van Zermelo volgt dat bij Chomp de winnende speler de eerste moet zijn. Hint[2]

Tot slot, het bewijs van de stelling van Zermelo, uit het ongerijmde. Neem aan dat er geen winnende strategie is.

e) Leg uit waarom dit leidt tot het bestaan van oneindige spelen (en daarmee een tegenspraak).

Opgave 7. Geef een natuurlijke deductie voor

a) $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$
b) $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (de wet van Peirce)

Een van de bekendste Nederlandse wiskundigen ooit was L.E.J. Brouwer (1881-1961). Hij ontwikkelde een eigen filosofie van de wiskunde (het zogenaamde *intuïtionisme*) waarin bewijzen uit het ongerijmde werden verworpen: hij vond dat je in de wiskunde alleen die stellingen moest accepteren waarvan je kon inzien waarom ze waar zijn. Als je alleen maar laat zien dat je in de problemen komt als je denkt dat iets niet klopt, dan snap je nog steeds niet echt waarom iets waar is, volgens Brouwer.

Opgave 8. In hoofdstuk 1 en 3 bekeken we een redenering, die bewijst dat er irrationale getallen c en d moeten bestaan met c^d rationaal. De redenering kon worden vertaald als

$\neg p \wedge q \rightarrow s$
$((\neg p \wedge \neg q) \wedge r) \rightarrow s$
$\neg p$
r
$\therefore s$

Met p staat voor "$\sqrt{2}$ is rationaal", q staat voor "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal", r staat voor "$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ is rationaal" en s staat voor "er bestaan irrationale getallen c en d met c^d rationaal"

---

[2] Elke winnende situatie die, onafhankelijk van de eerste zet, in de tweede zet kan worden bereikt kan ook in één zet bereikt worden

Geef een natuurlijke deductie voor deze redenering met behulp van een bewijs uit het ongerijmde.

Als de uitspraak die je wilt bewijzen het bestaan van een wiskundig object bevestigt, dan is reductio ad absurdum een wonderlijke aanpak: je laat zien dat het niet bestaan ervan tot een tegenspraak leidt (zoals hierboven). Als je reductio ad absurdum afwijst, zoals Brouwer, dan moet het bestaan van objecten dus bewezen worden door die objecten ook daadwerkelijk te construeren. Oftewel, de winnende strategie uit opgave 6, of het getal c^d uit opgave 8 moet daadwerkelijk gegeven worden. Deze stroming binnen de wiskunde wordt het constructivisme genoemd.

Opgave 9. Wat vind jij van Brouwer's ideeën? Zou jij bewijzen uit het ongerijmde verwerpen?

De disjunctie en volledigheid

Wat nog mist zijn afleidingsregels voor de disjunctie ∨. Die zijn een beetje lastig, en daarom doen we dat via een omweg.

Opgave 10. Laat met een waarheidstafel zien dat $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$.

Je kunt $p \vee q$ dus overal in je redenering vervangen door $\neg p \rightarrow q$ en daarvan de geldigheid bewijzen met natuurlijke deductie.

Opgave 11. In Opgave 17 uit het vorige hoofdstuk heb je de waarheid van de uitspraak

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

Geef een natuurlijke deductie van

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

Met behulp van een bewijs uit het ongerijmde.

We hebben in hoofdstuk 3 de geldigheid van redeneringen onderzocht met waarheidstafels. Dan gebruikten we het teken ⊨ voor "dus". We noemen dit *semantische geldigheid*. In hoofdstuk 4 onderzochten we de geldigheid van redeneringen met behulp van natuurlijke deductie. Dan gebruikten we het teken ⊢ voor "dus". Dit is *syntactisch geldigheid*. In opgave 3 en 4 zag je al twee voorbeelden dat deze twee vormen van geldigheid samenvallen (en dat gebruikten we ook voor de ∨ hierboven. In 1929 bewees de beroemde logicus Alfred Gödel (1906-1978) dat dit in het algemeen geldt, zijn zogeheten *volledigheidsstelling*: semantische en syntactisch geldigheid vallen samen.

Uitleiding

In deze module heb je voor het eerst kennis gemaakt met de logica als de kunst van het redeneren. Centraal stond het begrip ``geldige redenering'', waarbij een redenering geldig is als de waarheid van de conclusie onvermijdelijk is zodra de premissen waar zijn. We hebben gezien hoe we dit begrip wiskundig precies konden maken met behulp van waarheidstafels; met deze waarheidstafels konden we ook "uitrekenen" of een redenering geldig is of niet. Tenslotte hebben we met natuurlijke deductie een systeem ontwikkeld waarin we bewijzen konden weergeven.

In feite is dit slechts het begin en hebben we alleen een fragment van de logica gezien. De logica die we hebben behandeld is die van "en", "of", "niet" en "als … dan …" en wordt *propositielogica* genoemd. Niet alle logische redeneringen kunnen hierin gevangen worden: het punt is dat er meer woorden zijn die een logische functie hebben. Zo zijn er de woorden "alle" en "er is". Een voorbeeld van een geldige redenering die gebruik maakt van "alle" is de volgende:

Alle kraaien zijn vogels.

Alle vogels leggen eieren.

Dus: Alle kraaien leggen eieren.

Met behulp van propositielogica kunnen we dit niet adequaat analyseren: daarvoor hebben *predikatenlogica* nodig. Ook voor het analyseren van veel argumenten binnen de wiskunde is predikatenlogica essentieel. Natuurlijke deductie kan worden uitgebreid tot de predikatenlogica; de waarheidstafels helaas niet - deze worden vervangen door zogenaamde "modellen".

Binnen de wiskunde wordt nog steeds onderzoek gedaan naar logica. Voor een goed begrip van de grondslagen van de wiskunde is logica essentieel. Daarnaast heeft logica zich ontwikkeld tot een zelfstandig vakgebied binnen de wiskunde met toepassingen in andere takken van de wiskunde: vooral de modeltheorie (die modellen bestudeerd) is daarbij bijzonder succesvol.

Andere uitbreidingen van de propositielogica zijn modale en epistemische logica's. Hierin worden redeneringen geanalyseerd die gebruik maken van andere woorden in de taal met een logische functie: namelijk "het is noodzakelijk dat…" (in de modale logica) en "ik weet dat…" (in de epistemische logica). Veel van deze logica's hebben toepassingen in vakgebieden buiten de wiskunde, zoals de informatica, de kunstmatige intelligentie, de filosofie en de linguïstiek.

In feite duikt logica overal op waar informatie een belangrijke rol speelt. Als je wilt begrijpen wat informatie is en wat je ermee kunt, kun je niet om de logica heen. Gezien het feit dat informatie een steeds grotere rol speelt in onze samenleving, is het duidelijk dat het belang van de logica alleen maar zal toenemen.

Antwoorden

Antwoorden hoofdstuk 1

Opgave 1.1

In stap 5 deel je door $a - a = 0$. Dat is niet geldig.

Opgave 1.2

a) De jas kan ook om andere reden toch nat zijn geworden. Bijvoorbeeld omdat iemand met een waterpistool heeft geschoten.
b) De logische vorm is hetzelfde
c) Nee, klopt ook niet.

Opgave 1.3

Alhoewel redenering C bewijst dat de getallen p en q moeten bestaan is nog steeds niet duidelijk welke van de mogelijkheden juist is. De redenering is wel geldig.

Antwoorden hoofdstuk 2

Opgave 1

1. Geldig. 2.Geldig. 3. Niet geldig. Het toetje zou vla kunnen zijn. 4. Niet geldig. De eerste zin sluit niet uit dat op andere dagen ook pannenkoeken gegeten worden. 5. Geldig. 6. Geldig

Opgave 2

1. Nee. 2. Nee. 3. Ja. 4. Nee. 6. Ja. 7. Ja

Opgave 3

1. Niet geldig. 2. Geldig. 3. Niet geldig. 4. Geldig

Opgave 4

1. Geldig. 2. Geldig. 3. Geldig

Opgave 5

1. Geldig. 2. Niet geldig. 3. Geldig (dit is typisch voor de logische implicatie). 4. Geldig (dit ook). 5. Geldig.

Opgave 6

1. Waar. 2. Niet waar. 3. Niet waar. 4. Waar.

Opgave 7

1. p staat voor “We eten vanavond spinazie”
   q staat voor “We eten vanavond andijvie”
   $p \vee q$

2. p staat voor “Emma heeft een kat”
   q staat voor “Emma heeft een hond”
   $p \vee q$

3. p staat voor “Ajax wordt kampioen”
   q staat voor “Feyenoord wordt kampioen”
   $\neg p \rightarrow q$

4. p staat voor “De kantine is open”
   q staat voor “Je kunt een ijsje kopen”
   $p \rightarrow q$

Opgave 8

1. p staat voor “Emma drinkt koffie”
   q staat voor “Emma drinkt thee”
   $p \vee q$
   $\neg q$
   $\therefore p$

2. p staat voor “Henk verkoopt zijn aandelen Philips”
   q staat voor “De aandelen Philips dalen (verder)”
   $q \rightarrow p$
   $\neg p$
   $\therefore \neg q$

3. p staat voor “er is een toetje”
   q staat voor “het toetje is vla”
   r staat voor “het toetje is yoghurt”
   $p \rightarrow (q \vee r)$
   $\neg r$
   $\therefore p$ (niet geldig)

4. p staat voor “het is zaterdag”
   q staat voor “het is zondag”
   r staat voor “we eten pannenkoeken”
   $p \rightarrow r$
   q
   $q \rightarrow \neg p$
   $\therefore \neg r$ (niet geldig)

5. p staat voor “het regent”
   q staat voor “de zon schijnt”
   $\neg(p \wedge q)$

q
$\therefore \neg p$

6. p staat voor "de zon schijnt"
q staat voor "het terras is open"
$p \leftrightarrow q$ (dit is de zogeheten bi-implicatie, je kunt ook schrijven $(p \to q) \land (q \to p)$)
q
$\therefore p$

Opgave 9

1. inclusief. 2. Zou beide kunnen, waarschijnlijk exclusief 3. Exclusief. 4. Exclusief

Opgave 10

a) De zin zegt dat als we gewonnen hebben van Feyenoord, we zeker weten dat de midvoor op dreef was. De zin zegt niet dat als de midvoor op dreef is, dat we dan gegarandeerd van Feyenoord winnen - misschien moet er ook nog aan andere voorwaarden voldaan, bijvoorbeeld dat de keeper op dreef is. Dus vertaling is $w \to d$.

b) De zin zegt niet dat we gegarandeerd RBC verslaan. De zin zegt dat als de midvoor op dreef is, dan we dan gegarandeerd RBC verslaan. Daarom $d \to v$.

c) De zin zegt dat als we gewonnen hebben van Feijenoord, we zeker weten dat de midvoor op dreef was. De zin zegt niet dat als de midvoor op dreef is, dat we dan gegarandeerd van Feijenoord winnen - misschien moet ook de keeper op dreef zijn. Daarom $w \to d$.

Antwoorden hoofdstuk 3

Opgave 1.

1. Nederland. 2. Een pinguïn of een struisvogel.

Opgave 2.

Meerdere oplossingen mogelijk!

1. Tegenvoorbeeld: $a = 1, d = 2, b = 3, c = 4$.
2. Tegenvoorbeeld: $a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{4}$.
3. Tegenvoorbeeld: $a = 1, b = 0, c = 1$.
4. Tegenvoorbeeld $a = 2$ en $b = 4$.

Opgave 3.

1. Frits heeft geen miljoen euro, zijn auto gaat en stuk en hij koopt geen Bugati Veyron.
2. Frits heeft miljoen euro, zijn auto gaat stuk en hij koopt een Bugati Veyron.

3. Het regent en sneeuwt niet, maar Fjodor gaat niet naar buiten.

Opgave 4.

a.

	Volgorde					Premissen waar?	Conclusie waar?
1	GB	GM	SB	J	SM	nee	ja
2	GB	GM	J	SB	SM	nee	ja
3	GB	GM	J	SM	SB	nee	ja
4	GB	SB	GM	J	SM	nee	ja
5	GM	GB	J	SB	SM	ja	ja
6	GM	GB	J	SM	SB	ja	ja
7	GM	GB	SB	J	SM	nee	ja
8	GM	J	GB	SM	SB	ja	nee
9	GM	J	GB	SB	SM	ja	nee
10	GM	J	SM	GB	SB	ja	nee

b. In de laatste drie scenario's zijn de premissen waar, maar de conclusie niet.
c. Er zijn dus scenario's denkbaar die de premissen waar maken, maar de conclusie niet: de redenering is dus niet geldig.

Opgave 5.

1. $p \wedge q$ is onwaar.
2. $p \wedge \neg q$ is waar.
3. $p \rightarrow q$ is onwaar.
4. $p \wedge (q \wedge r)$ is onwaar.
5. $p \wedge (q \vee r)$ is waar (omdat zowel p als $q \vee r$ waar zijn).

Opgave 6.

p	q	$p \wedge q$
onwaar	onwaar	onwaar
onwaar	waar	onwaar
waar	onwaar	onwaar
waar	waar	waar

Opgave 7.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

en

p	$\neg p$
0	1
1	0

Opgave 8.

-

Opgave 9.

1. $q \to p$ is waar.
2. $(p \to q) \wedge (q \to p)$ is onwaar omdat $p \to q$ dat is.
3. $r \to (p \to q)$ is onwaar.
4. $\neg\big(p \to (q \vee (r \to \neg p))\big)$ is waar: omdat p waar is en $q \vee (r \to \neg p)$ onwaar, is $p \to (q \vee (r \to \neg p))$ onwaar en $\neg\big(p \to (q \vee (r \to \neg p))\big)$ dus waar.

Opgave 10.

p	q	r	$p \vee r$	$\neg q$	$\neg q \to r$	$(p \vee r) \wedge (\neg q \to r)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Opgave 12.

a)

p	q	r	$p \vee q$	$q \to r$	$p \wedge r$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

b) Zeker: er zijn er zelfs twee: die waarbij p waar is en q en r niet, en die waarbij q en r waar zijn en p niet.

c) Nee, omdat er scenario's denkbaar zijn waaronder de premissen waar zijn en de conclusie niet (zie b), is de redenering niet geldig.

d) Is de redenering geldig, denk je?

Opgave 13.

a)

p	q	r	$p \to q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$r \to (p \wedge \neg q)$	$\neg r$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

b) en c) Ja, deze redenering is geldig: er is geen interpretatie (scenario) waaronder de premissen waar zijn, maar de conclusie niet.

Opgave 14.

a) We gebruiken de volgende vertaalsleutel:

v we gaan op vakantie
f we gaan naar Frankrjk
i we gaan naar Italië

Dan kunnen we de premissen schrijven als $v \to (f \vee i)$ en $\neg(v \wedge f)$ en de conclusie als $\neg i \to \neg v$.

b)

f	i	v	$v \to (f \lor i)$	$\neg(v \land f)$	$\neg i \to \neg v$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Onder iedere interpretatie die de premissen waarheidswaarde 1 geeft, krijgt de conclusie ook waarheidswaarde 1. De redenering is dus geldig.

Opgave 15.

a) De waarheidstafel is:

p	q	r	formule
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

b) Je kunt direct zien: de formule zegt dat ze alleen waar is onder de volgende interpretatie: wanneer p, q en r allemaal onwaar zijn, wanneer q waar is en p en r niet en wanneer p, q en r allemaal waar zijn.

c) $(\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land q \land \neg r)$

Opgave 16.

a) $2 \times 2 \times 2 = 8$.

b) 2^n.

Opgave 17.

a) De eerste zin is $(p \land q) \to r$ en de tweede $(p \to r) \lor (q \to r)$, waarbij p staat voor “Ik heb een grote tuin”, q staat voor “Ik heb 50.000 euro” en r staat voor “Ik bouw een zwembad.”

p	q	r	$p \wedge q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

b) Zoals je in de tabel kunt zien, hebben beide formules onder alle interpretaties dezelfde waarheidswaarde. Ze zijn dus logisch equivalent.

Antwoorden hoofdstuk 4

Opgave 1.

1	$(p \wedge q) \wedge r$	premisse
2	$p \wedge q$	$\wedge E, 1$
3	r	$\wedge E, 1$
4	p	$\wedge E, 2$
5	q	$\wedge E, 2$
6	$q \wedge r$	$\wedge I, 3{,}5$
7	$p \wedge (q \wedge r)$	$\wedge I, 4{,}6$

Opgave 2.

1	p	premisse
2	q	premisse
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisse
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E, 1{,}3$
5	r	$\rightarrow E, 2{,}4$

Opgave 3.

a)

1	$p \rightarrow q$		premisse
2	r		premisse
3		p	aanname
4		q	$\rightarrow E, 1{,}3$
5		$q \wedge r$	$\wedge I, 2{,}4$
6	$p \rightarrow (q \wedge r)$		$\rightarrow I$, 3-5

b)

c)

p	q	r	$p \to q$	$q \land r$	$p \to (q \land r)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

d) De premissen zijn beide waar in regel 2, 4 en 8. In die rijen is ook de conclusie waar. Dus de redenering is geldig.

e) Als het zaterdag is, dan is er markt. De supermarkten zijn open. Dus, als het zaterdag is, dan is er markt en zijn de supermarkten open.

Opgave 4

a)

1	$p \to q$		premisse
2	$q \to r$		premisse
3		p	aanname
4		q	$\to E$, 1,3
5		r	$\to E$, 2,4
6	$p \to r$		$\to I$, 3-5

b)

1	$p \to (q \to r)$		premisse
2		$p \land q$	aanname
3		p	$\land E$, 2
4		q	$\land E$, 2
5		$q \to r$	$\to E$, 1,3
6		r	$\to E$, 4,5
7	$(p \land q) \to r$		$\to I$, 2-6

c)

1	$(p \land q) \to r$			premisse
2		p		aanname
3			q	aanname
4			$p \land q$	$\land I$, 2,3
5			r	$\to E$, 1,4
6		$q \to r$		$\to I$, 3-5
7	$p \to (q \to r)$			$\to I$, 2-6

d)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

De vijfde en zevende kolommen zijn identiek, dus de formules zijn equivalent.

Opgave 5.

a)

1		$p \wedge \neg p$	aanname
2		p	$\wedge E, 2$
3		$\neg p$	$\wedge E, 2$
4		$\bot$	$\neg E, 2{,}3$
5	$\neg(p \wedge \neg p)$		$\neg I$, 1-4

b)

1	$\neg(p \wedge q)$			premisse
2		p		aanname
3			q	aanname
4			$p \wedge q$	$\wedge I, 2{,}3$
5			$\bot$	$\neg E, 1{,}4$
6		$\neg q$		$\neg I$, 3-5
7	$p \rightarrow \neg q$			$\rightarrow I$, 2-6

c)

1	$\neg(p \rightarrow q)$			premisse
2		q		aanname
3			p	aanname
4			q	herhaling
6		$p \rightarrow q$		$\rightarrow I$, 3,4
		$\bot$		$\neg E, 1{,}5$
7	$\neg q$			$\neg I$, 2-6

Opgave 6.

a) In zowel schaken als vier-op-een-rij kan het spel eindigen zonder dat één van beide spelers gewonnen heeft. Bij schaken kan het spel in remise eindigen door bijvoorbeeld pat of een herhaling van zetten. Bij vier-op-een-rij kan het hele bord vol raken zonder dat één van de spelers vier stenen op een rij heeft. Een voorbeeld van een spel dat wel aan de voorwaarden voldoet is “wolf en schapen”.

b) –

c) –

d) We beargumenteren dat de tweede speler geen winnende strategie heeft. Stel de tweede speler had wel een winnende strategie. Als de eerste speler alleen het vakje rechtsboven eet, dan moet de tweede speler kunnen antwoorden met een winnende zet. Het punt is dat, welk blokje de tweede speler ook eet, er een positie ontstaat die de eerste speler ook in de eerste beurt had kunnen bereiken door dat blokje te eten. Dus de eerste had kunnen winnen door dat blokje te eten, omdat de situatie die daaruit ontstaat voor de volgende speler verliezend is. We zeggen wel dat de eerste speler de winnende strategie van de tweede speler kan "stelen". Dit is in tegenspraak met dat de tweede speler een winnende strategie heeft. De conclusie is dan ook dat die tweede speler dat niet heeft.; en volgens de Stelling van Zermelo moet de eerste speler dus een winnende strategie hebben.

e) Stel dat er een spel bestaat waarin twee spelers om beurten een zet doen en één van beiden wint na een eindig aantal zetten (ongeacht welke). We willen laten zien dat één van beiden een winnende strategie heeft, en doen dat met een bewijs uit het ongerijmde. Neem aan dat geen van beide spelers kan winnen (zelfs bij perfect spel). Dat betekent dat eerste speler een openingszet kan doen die niet verliezend is. Was dat namelijk wel zo, dan kan de tweede speler winnen na iedere zet van de eerste speler. Dat zou betekenen dat de tweede speler een winnende strategie heeft en we hadden aangenomen dat dat niet zo was. We laten de eerste speler de zet doen die niet verliezend voor hem/haar is. In de situatie die dan ontstaat hoeft de tweede speler ook niet te verliezen: anders zou de eerste speler een winnende zet hebben gespeeld en er dus een winnende strategie bestaat voor de eerste speler—dat zou in tegenspraak zijn met de aanname dat in de beginpositie geen van de spelers een winnende strategie heeft. Dus na de zet die de eerste speler gedaan heeft ontstaat een situatie waarin geen van beide spelers een winnende strategie heeft. Dat betekent dat we het argument kunnen herhalen: er is in deze positie een zet waarna de tweede speler niet hoeft te verliezen. Als we de tweede speler deze zet laten spelen, ontstaat weer een situatie waarin geen van beide spelers een winnende strategie heeft. Et cetera. Hiermee ontstaat een oneindig spelverloop: want zodra het spel eindigt, heeft één van beide spelers gewonnen en we hebben juist zo'n spelverloop gekozen waarbij niemand verliest. We concluderen dat de aanname dat geen van beide speler een winnende strategie heeft in tegenspraak is met de aanname dat het spelverloop eindig is.
Reflectie: het opmerkelijke aan dit argument is dat we na dit bewijs nog steeds niet weten wie een winnende strategie heeft en hoe die eruit zit. Dit is een voorbeeld van een stelling die door Brouwer zou worden verwerpen (zie de tekst boven opgave 7).

Opgave 7.

a)

1	$\neg q \to \neg p$		premisse
2		p	aanname

3	$\neg q$	aanname
4	$\neg p$	$\rightarrow E$,1,3
5	$\bot$	$\neg E$, 2, 4
6	q	RAA, 3-5
7	$p \rightarrow q$	$\rightarrow I$, 2-6

b)

1	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	aanname
2	$\neg p$	aanname
3	p	aanname
4	$\bot$	$\neg E$, 2, 3
5	q	EFQ, 4
6	$p \rightarrow q$	$\rightarrow I$, 3-5
7	p	$\rightarrow E$, 1, 6
8	$\bot$	$\neg E$, 2, 7
9	p	RAA, 2-8
10	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	$\rightarrow I$, 1-9

Opgave 9

-

Opgave 10

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

Kolommen drie en vijf zijn identiek en daarmee zij de formules equivalent.

Opgave 11.

1	$\neg(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$	aanname
2	$p \wedge q$	aanname
3	$\neg r$	aanname
4	$p \rightarrow r$	aanname
5	p	$\wedge E$, 2
6	r	$\rightarrow E$, 4,5
7	$\bot$	$\neg E$, 3, 6
8	$\neg(p \rightarrow r)$	$\neg I$,4-7
9	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$, 1, 8
10	q	$\wedge E$, 2
11	r	$\rightarrow E$, 9,10
12	$\bot$	E, 3, 11

13	$\quad\quad\quad r$	RAA,3-12
14	$\quad\quad (p \wedge q) \rightarrow r$	$\rightarrow I$,2-13
15	$(\neg(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$ $\rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	$\rightarrow I$,1-14