Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 3 Binomiale Verdelingen

1 Vissen

(a) $P(3g, 5r, 1b) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{15}{6}} \approx 0,0719$.

(b) $P(5 \text{ dezelfde vissen}) = \frac{\binom{5}{5}+\binom{6}{5}}{\binom{15}{5}} \approx 0,0023$.
De mogelijkheden voor precies 5 vissen met allen dezelfde kleur zijn namelijk 5 rode vissen of 5 blauwe vissen.

(c) $P(\text{meer gele dan rode vissen}) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{9}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{9}{5}} \approx 0,357$.
De mogelijkheden voor meer gele dan rode vissen zijn namelijk 3 gele en 2 rode of 4 gele en 1 rode.

(d) Zij X het aantal rode vissen in het net. Dan berekenen we de verwachtingswaarde van het aantal rode vissen door middel van $\sum_{i=1}^{5} i \cdot P(X = i)$ (omdat er maar 4 gele vissen in het meer zwemmen moet er minstens 1 rode vis in het net zitten). De kans $P(X = i)$ berekenen we door middel van het vaasmodel. Als i het aantal rode vissen dan is $5 - i$ het aantal gele vissen. Dit geeft: $P(X = i) = \frac{\binom{5}{i}\cdot\binom{4}{5-i}}{\binom{9}{5}}$. De verwachting is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) \\
&= 1 \cdot \frac{5}{126} + 2 \cdot \frac{20}{63} + 3 \cdot \frac{10}{21} + 4 \cdot \frac{10}{63} + 5 \cdot \frac{5}{126} \\
&\approx 3
\end{aligned}$$

Het verwachte aantal rode vissen in Linda's net is 3.

2 Wachtwoord

We gebruiken de formule $P(X \leq k) = P(X \leq k+1) - P(X = k+1)$.

(a) $P(X \leq 1) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = 0,510 - 0,210 = 0,300$.
$P(X \leq 4) = P(X \leq 5) - P(X = 5) = 0,732 - 0,072 = 0,760$.
$P(X = 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 6) = 0,817 - 0,782 = 0,035$.

(b) De verwachting is gelijk aan $\sum_{k=1}^{7} x \cdot P(X = x) = 1 \cdot 0,300 + 2 \cdot 0,210 +$
$+ 3 \cdot 0,147 + 4 \cdot 0,103 + 5 \cdot 0,072 + 6 \cdot 0,050 + 7 \cdot 0,035 = 2,478$.
We verwachten dat de vrouw 3 pogingen nodig heeft.

3 Gekleurde vlakken

In de uitwerkingen hieronder definiëren we D1 als dobbelsteen 1 en D2 als dobbelsteen 2.

(a) $P(bg) = P(\mathrm{D1} = b, \mathrm{D2} = g) + P(\mathrm{D1} = g, \mathrm{D2} = b)$
$= P(\mathrm{D1} = b) \cdot P(\mathrm{D2} = g) + P(\mathrm{D1} = g) \cdot P(\mathrm{D2} = b)$
$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(b) $P(\text{twee vlakken met dezelfde kleur}) = P(bb) + P(rr) + P(gg)$
$= P(\mathrm{D1} = b, \mathrm{D2} = b) + P(\mathrm{D1} = r, \mathrm{D2} = r) + P(\mathrm{D1} = g, \mathrm{D2} = g)$
$= P(\mathrm{D1} = b) \cdot P(\mathrm{D2} = b) + P(\mathrm{D1} = r) \cdot P(\mathrm{D2} = r) + P(\mathrm{D1} = g) \cdot P(\mathrm{D2} = g)$
$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

4 Roulette

(a) Zij A de gebeurtenis dat het balletje op één van de vier getallen komt waar Julie op heeft gegokt. Dan is $P(\text{niet } A) = \frac{33}{37}$.
De kans dat Julie dan geen enkele keer wint in 9 ronden is gelijk aan $\left(\frac{33}{37}\right)^9 = 0,357$.

(b) Zij B de gebeurtenis dat het balletje op één van de rode getallen van Julie komt. Dan is $P(B) = \frac{3}{37}$ en $P(\text{niet } B) = \frac{34}{37}$.
Zij X het aantal keren dat Julie een ronde wint, dan is X binomiaal verdeeld met succeskans $p = \frac{3}{37}$. Dan $P(X = 3) = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{3}{37}\right)^3 \cdot \left(\frac{34}{37}\right)^6 = 0,027$.

(c) Zij B de gebeurtenis dat het balletje op één van de 6 getallen komt waar Theo op heeft gegokt. Dan is $P(\text{niet } B) = \frac{31}{37}$.
De kans dat Theo dan geen enkele keer wint in x ronden is gelijk aan $\left(\frac{31}{37}\right)^x$. Deze kans moet kleiner zijn dan 0,4. Met de rekenmachine volgt dat $x \approx 5,18$ dus Theo moet minstens 6 rondes meedoen.

(d) Er wordt op één getal ingezet dus $P(\text{winst}) = \frac{1}{37}$ en $P(\text{verlies}) = \frac{36}{37}$. Dan is de verwachte winst gelijk aan
$-1 \cdot P(\text{verlies}) + 35 \cdot P(\text{winst}) = -1 \cdot \frac{36}{37} + 35 \cdot \frac{1}{37} = -0,027$.