Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 4 Inproduct

1 Piramide

(a) Als eerste moeten we de vector $\overrightarrow{LT}$ berekenen:
$T - L = (4, 4, 8) - (0, 0, 15) = (4, 4, -7)$.
We kunnen nu de parametervoorstelling van l geven door punt L of T te kiezen en daar $t \cdot \overrightarrow{LT}$ bij op te tellen:
$l(t) = L + t \cdot \overrightarrow{LT} = (0, 0, 15) + t \cdot (4, 4, -7) = (4t, 4t, 15 - 7t)$, of
$l(t) = T + t \cdot \overrightarrow{LT} = (4, 4, 8) + t \cdot (4, 4, -7) = (4 + 4t, 4 + 4t, 8 - 7t)$.

(b) Schaduwpunt S ligt op de lijn $l(t)$ en in het (x, y)-vlak. De lijn l snijdt het (x, y)-vlak als de z-coördinaat gelijk is aan 0.
$15 - 7t = 0 \Rightarrow 7t = 15 \Rightarrow t = \frac{15}{7}$.
Snijpunt S is dan gelijk aan $(4 \cdot \frac{15}{7}, 4 \cdot \frac{15}{7}, 15 - 7 \cdot \frac{15}{7}) = (8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7}, 0)$.
Schaduwpunt S ligt dus net buiten het grondvlak van de piramide.

(c) De richtingsvector $\overrightarrow{AC}$ van de lijn m is gelijk aan
$C - A = (0, 8, 0) - (8, 0, 0) = (-8, 8, 0)$.
Dan is $m(t) = (8, 0, 0) + t \cdot (-8, 8, 0) = (8 - 8t, 8t, 0)$.
De lijn n heeft dezelfde richtingsvector en gaat door S dus
$n(t) = (8\frac{4}{7}, 8\frac{4}{7}, 0) + t \cdot (-8, 8, 0) = (8\frac{4}{7} - 8t, 8\frac{4}{7} + 8t, 0)$.

2 Blok

(a) M is het middelpunt van de ribbe AE dus $M = (4, 0, 4\frac{1}{2})$ en $G = (0, 4, 9)$.
Als eerste stellen we de parametervoorstelling door de punten A en G op:
$\overrightarrow{AG} = (0, 4, 9) - (4, 0, 0) = (-4, 4, 9)$,
$l(t) = (4, 0, 0) + t \cdot (-4, 4, 9) = (4 - 4t, 4t, 9t)$.
Vervolgens stellen we de parametervoorstelling door de punten C en M op: $\overrightarrow{CM} = (4, 0, 4\frac{1}{2}) - (0, 4, 0) = (4, -4, 4\frac{1}{2})$,
$m(s) = (0, 4, 0) + s \cdot (4, -4, 4\frac{1}{2}) = (4s, 4 - 4s, 4\frac{1}{2}s)$.

Het snijpunt S tussen l en m geeft het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} 4-4t=4s \\ 4t=4-4s \\ 9t=4\frac{1}{2}s \end{array}\right\} s=2t \Rightarrow 4-4t=8t \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow s=\frac{2}{3}$$

Als we dit invullen krijgen we:
$l(\frac{1}{3})=(4-4\cdot\frac{1}{3},4\cdot\frac{1}{3},9\cdot\frac{1}{3})=(\frac{8}{3},\frac{4}{3},3)$, en
$m(\frac{2}{3})=(4\cdot\frac{2}{3},4-4\cdot\frac{2}{3},4\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3})=(\frac{8}{3},\frac{4}{3},3)$.
Het snijpunt S van l en m is dus gelijk aan $(\frac{8}{3},\frac{4}{3},3)$.

(b) Om de scherpe hoek tussen $\overrightarrow{AG}$ en $\overrightarrow{CM}$ te berekenen gebruiken we de formule

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CM}=|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{CM}|\cdot\cos(\varphi).$$

Het inproduct van $\overrightarrow{AG}$ en $\overrightarrow{CM}$ is gelijk aan: $-4\cdot 4+4\cdot -4+9\cdot 4\frac{1}{2}=8\frac{1}{2}$.
$|\overrightarrow{AG}|=|(-4,4,9)|=\sqrt{(-4)^2+4^2+9^2}=\sqrt{123}$.
$|\overrightarrow{CM}|=|(-2,2,4\frac{1}{2})|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(4\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{209}$.
Nu: $8\frac{1}{2}=\sqrt{123}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{209}\cdot\cos(\varphi)$
$\cos(\varphi)=\frac{8\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{123}\cdot\sqrt{209}}=\frac{17}{\sqrt{25707}}$
$\varphi=\cos^{-1}(\frac{17}{\sqrt{25707}})\approx 83,9°$.
De stompe hoek tussen $\overrightarrow{AG}$ en $\overrightarrow{CM}$ is dus gelijk aan $180°-83,9°=96,1°$.

(c) Hiervoor moeten we de formule

$$\frac{|\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{k}|}{|\overrightarrow{k}|}$$

gebruiken waarbij in ons geval $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AS}$ en $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AS}=(\frac{8}{3},\frac{4}{3},3)-(4,0,0)=(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},3)$ en
$\overrightarrow{AC}=(0,4,0)-(4,0,0)=(-4,4,0)$. Dit geeft:

$$\frac{|(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},3)\cdot(-4,4,0)|}{|(-4,4,0)|}=\frac{\frac{32}{3}}{32}=\frac{1}{3}.$$

De lengte van de loodrechte projectie $\overrightarrow{AS}$ op $\overrightarrow{AC}$ is dus gelijk aan $\frac{1}{3}$.

3 Vlak

(a) Bekijk het punt $P=(1,2,-5)$, dan $4\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot -5=3$ en dus voldoet P aan de vergelijking. Om een parametervoorstelling op te stellen door dit punt P die loodrecht staat op vlak V, maken we gebruik van de normaalvector. Het vlak V is van de vorm $ax+by+cz=d$ en dus is de normaalvecotr gelijk aan $N = (a, b, c) = (4, 2, 1)$. Nu kunnen we de parametervoorstelling opstellen met P als steunpunt en N als richtingsvector:

$$l(t) = P + t \cdot N = (1, 2, -5) + t \cdot (4, 2, 1) = (1 + 4t, 2 + 2t, -5 + t).$$

(b) Als eerste moeten we een vergelijking van de lijn n opstellen.
$\overrightarrow{BC} = (4, 7, 6) - (5, 6, 7) = (-1, 1, -1)$ en dus
$n(t) = B + t \cdot \overrightarrow{BC} = (5, 6, 7) + t \cdot (-1, 1, -1) = (5 - t, 6 + t, 7 - t)$.
Nu kunnen we de formule uit hoofdstuk 3 gebruiken die de afstand tussen een punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ en een vlak V met vergelijking $ax + by + cz = d$ berekent:

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Invullen geeft:

$$\frac{|4 \cdot (5 - t) + 2 \cdot (6 + t) + 1 \cdot (7 - t) - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|20 - 4t + 12 + 2t + 7 - t - 3|}{\sqrt{21}} = \frac{|36 - 3t|}{\sqrt{21}}.$$

We zijn op zoek naar punten op lijn n die afstand 3 hebben tot vlak V, ofwel:

$$\begin{aligned}
&\frac{|36 - 3t|}{\sqrt{21}} = 3\\
&|36 - 3t| = 3\sqrt{21}\\
&36 - 3t = 3\sqrt{21} \lor -36 + 3t = 3\sqrt{21}\\
&3t = 36 - 3\sqrt{21} \lor 3t = 36 + 3\sqrt{21}\\
&t = 12 - \sqrt{21} \lor t = 12 + \sqrt{21}
\end{aligned}$$

Invullen van onze gevonden t's geeft:
$(5-12+\sqrt{21}, 6+12-\sqrt{21}, 7-12+\sqrt{21}) = (-7+\sqrt{21}, 18-\sqrt{21}, -5+\sqrt{21})$,
$(5-12-\sqrt{21}, 6+12+\sqrt{21}, 7-12-\sqrt{21}) = (-7-\sqrt{21}, 18+\sqrt{21}, -5-\sqrt{21})$.
Dus de punten op lijn n met afstand 3 tot vlak V zijn
$(-7 + \sqrt{21}, 18 - \sqrt{21}, -5 + \sqrt{21})$ en $(-7 - \sqrt{21}, 18 + \sqrt{21}, -5 - \sqrt{21})$.

4 Vector in vlak

De normaalvector van het vlak V hebben we al berekend bij opgave 3:
$N = (4, 2, 1)$. Omdat vlak W ook van de vorm $ax + by + cz = d$ is, volgt dat de normaalvector van W gelijk is aan $M = (3, 1, 2)$. Om de hoek tussen de normaalvectoren te berekenen gebruiken we weer de formule

$$N \cdot M = |N| \cdot |M| \cdot \cos(\varphi).$$

$N \cdot M = (4, 2, 1) \cdot (3, 1, 2) = 12 + 2 + 2 = 16$.
$|N| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

$|M| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
$|N| \cdot |M| = \sqrt{21} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{294}$.
Invullen van de formule geeft:

$$16 = \sqrt{294} \cdot \cos(\varphi)$$
$$\cos(\varphi) = \frac{16}{\sqrt{294}}$$
$$\varphi = \cos^{-1}(\frac{16}{\sqrt{294}}) = 21,07^\circ$$

De hoek tussen de vlakken V en W is dus gelijk aan 21,07°.