Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 5 Normale verdelingen

1 Donatie

(a) De kansen op de verschillende bedragen zijn $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}$ en $\mathrm{P}(X=10)=\frac{1}{6}$.

$$\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{1}{6}\approx 4,83$$

$$\mathrm{Vaa}(X)=\frac{1}{2}\cdot|3-4,83|+\frac{1}{3}\cdot|5-4,83|+\frac{1}{6}\cdot|10-4,83|\approx 1,83$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{2}\cdot(3-4,83)^2+\frac{1}{3}\cdot(5-4,83)^2+\frac{1}{6}\cdot(10-4,83)^2\approx 6,14$$

(b) De kansen op de verschillende bedragen zijn $\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{3}{12}$, $\mathrm{P}(X=7)=\frac{3}{12}$ en $\mathrm{P}(X=10)=\frac{1}{12}$.

$$\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{5}{12}+5\cdot\frac{3}{12}+7\cdot\frac{3}{12}+10\cdot\frac{1}{12}\approx 5,08$$

De verwachting van X ligt met de toevoeging van het vierde bedrag dus hoger.

(c) We gebruiken de kansen uit (b):

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{5}{12}\cdot(3-5,08)^2+\frac{3}{12}\cdot(5-5,08)^2+\frac{3}{12}\cdot(7-5,08)^2+\frac{1}{12}\cdot(10-5,08)^2\approx 4,74$$

$$\mathrm{Sd}(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{4,74}\approx 2,18$$

2 Schoolplein

(a) $\mathrm{L}_1=\{4,5,6,7,8,9,10\}$.
$\mathrm{L}_2=\{3,11,24,37,35,26,14\}$.
1-Var Stats geeft $\mu=7,49$ en $\sigma=1,47$.

(b) $\mathrm{P}(5,5 \leq U \leq 8,5) = \text{NORMALDF}(5,5; 8,5; 7,49; 1,47) \approx 0,67$.
$\mathrm{P}(6 \leq X \leq 8) = \mathrm{P}(X = 6) + \mathrm{P}(X = 7) + \mathrm{P}(X = 8) = \frac{24+37+35}{150} \approx 0,64$.
Deze kansen komen dus redelijk met elkaar overeen.

(c) De grenzen van het 68% gebied worden bepaald door $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. De linkergrens is dus gelijk aan $7,49 - 1,47 = 6,02$ en de rechtergrens is gelijk aan $7,49 + 1,47 = 8,96$.

3 Pindakaas

(a) $\text{NORMALDCF}(910, 1040, 1000, 15) \approx 0,66$. 66% van de grote potten pindakaas wegen tussen de 990 en 1020 gram.

(b) Hiervoor gebruiken we de tweede vuistregel: 95,5% ligt tussen $1000 - 2 \cdot 15 = 970$ en $1000 + 2 \cdot 15 = 1030$. Vanaf 970 gram is de pot te licht en vanaf 1030 gram is de pot te zwaar.

(c) Ook hiervoor kunnen we de NORMALCDF functie gebruiken van de rekenmachine, we hebben nu echter geen rechtergrens dus moeten we daarvoor het getal 10^{99} gebruiken.
$\text{NORMALCDF}(1010, 10^{99}, 1000, 15) \approx 0,252$. Dus 25,2% van de potten weegt meer dan 1010 gram.

4 Normaliseren

(a) In dit geval hebben we $\mu = 126$ en $\sigma = 3$. De z-waarde is dan gelijk aan: $z = \frac{132-\mu}{\sigma} = \frac{132-126}{3} = 1,50$. Met behulp van de tabel kunnen we aflezen dat 6,68% van de collegeblokken niet verkocht wordt.

(b) Een basilicumplantje is na 8 weken gemiddeld $8 \cdot 3,75 = 30$ cm lang. Er geldt dus dat $\mu = 30$. Onze z-zwaarde is dan gelijk aan $z = \frac{28-30}{\sigma}$. We zijn opzoek naar een negatieve z-waarde omdat $28 - 30 = -2$ en $\sigma > 0$. De z-waarde die bij 1,32%=0,132 hoort is -2,22. Dan
$z = \frac{-2}{\sigma} = -2,22 \Rightarrow \sigma = \frac{-2}{-2,22} = 0,90$. De standaardafwijking is dus gelijk aan 0,90 cm.

(c) Er geldt dat $z = \frac{57,5-\mu}{2}$. De z-waarde die bij 22,7% hoort is gelijk aan 0,75. Dan
$z = \frac{57,50-\mu}{2} = 0,75 \Rightarrow \mu = 57,5 - 2 \cdot 0,75 = 56$. Een stokbrood is dus gemiddeld 56 cm lang.

5 Hartslag

(a) Er is gegeven dat $W = Y - X$. Omdat X en Y onafhankelijk van elkaar zijn kunnen we de verwachting en variante van de stochasten X en Y los van elkaar optellen.

$\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(Y - X) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X) = 76 - 68 = 12.$
$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = 8 + 6 = 14.$

(b) Voordat we de tabel kunnen gebruiken moeten we de stochast W eerst standaardiseren:

$$\hat{W} = \frac{W - \mathrm{E}(W)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}}.$$

Hiernaast moeten we ook de waarde in de kans normaliseren:

$$\frac{14 - \mathrm{E}(W)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)}} = \frac{14 - 12}{\sqrt{14}} \approx 0,53.$$

Dit geeft nu:
$\mathrm{P}(W < 14) = \mathrm{P}(\hat{W} < 0.53) = 0,702.$

(c) We willen de kans $\mathrm{P}(Z > 6)$ berekenen. Om deze kans te berekenen moeten we eerst weten met welke parameters Z normaal verdeeld is.
$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(S - R) = \mathrm{E}(S) - \mathrm{E}(R) = 184 - 180 = 4.$
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(S - R) = \mathrm{Var}(S) + \mathrm{Var}(R) = 4 + 3 = 7.$
W is dus normaal verdeeld met $\mu = 4$ en $\sigma = \sqrt{7}$. Dan is de kans $\mathrm{P}(Z > 6)$ gelijk aan $\textsc{normalcdf}(6,10^{99},4,\sqrt{7}) \approx 0,22$.