# Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 6 Discrete Dynamische Modellen

## 1 Termen

Voor deze rekenkundige rij hebben we de directe formule $u_n = 3 + 61n$.
$u_n = 751$ geeft $3 + 61n = 751$, ofwel $n \approx 12.26$. Omdat de rij begint met $n = 0$ zijn de eerste 13 termen dus kleiner dan 751. De $14^e$ term is dus de eerste term die groter is dan 751.

## 2 IJssalon

Zij bn het aantal bolletjes dat nog verkocht kan worden, $n$ uur na openingstijd. Dan is $b_0 = 30$ bolletjes. Elk uur wordt er 1 nieuwe bak ijs gemaakt wat neerkomt op 30 nieuwe bolletjes. Ook wordt er elk uur 60% van het beginaantal bolletjes van dat uur verkocht. Uit deze gegevens kunnen we de volgende recursieve formule opstellen:

$$b_n = b_{n-1} + 30 - 0,60 \cdot b_{n-1},$$

ofwel

$$b_n = 0,40 \cdot b_{n-1} + 30.$$

We kunnen deze formule invullen in de GR:
`Y = ,` $n$`Min = 0,`
`u(`$n$`) = 0,40*u(`$n-1$`) + 30,`
`u(`$n$`Min) = 30.`
Dit geeft de tabel

| **Tijd** | **Bolletjes over** |
|---|---|
| 12:00 uur | $b_0 = 30$ |
| 13:00 uur | $b_1 = 42$ |
| 14:00 uur | $b_2 = 46.8$ |
| 15:00 uur | $b_3 = 48.72$ |
| 16:00 uur | $b_4 = 49.488$ |
| 17:00 uur | $b_5 = 49.795$ |

In de tabel is dan te zien dat het aantal bolletjes niet negatief wordt. Het ijs kan dus niet vóór 17:00 uur uitverkocht raken.
Het aantal bolletjes dat de eigenaar nog over heeft om 17:00 kunnen we in de tabel aflezen bij $n = 5$, ofwel $b_5 \approx 50$.

## 3 Diepzeekwalletje

(a) Het aantal volwassen diepzeekwalletjes hangt af van het aantal nakomelingen en 70% van de nakomelingen overleeft. Dit geeft $v_n = 0,7 \cdot j_{n-1}$. Het aantal nakomelingen hangt af van het aantal volwassen diepzeekwalletjes en een volwassen diepzeekwalletje produceert elk jaar vier nakomelingen. Dit geeft $j_n = 4 \cdot v_{n-1}$.

(b) Er is gegeven dat $v_0 = 1500$ en $j_0 = 4200$. Dan:
$v_1 = 0,7 \cdot j_0 = 0,7 \cdot 4200 = 2940$ en $j_1 = 4 \cdot v_0 = 4 \cdot 1500 = 6000$,
$v_2 = 0,7 \cdot j_1 = 0,7 \cdot 6000 = 4200$ en $j_2 = 4 \cdot v_1 = 4 \cdot 2940 = 11760$,
$v_3 = 0,7 \cdot j_2 = 0,7 \cdot 11760 = 8232$ en $j_3 = 4 \cdot v_2 = 4 \cdot 4200 = 16800$,
$v_4 = 0,7 \cdot j_3 = 0,7 \cdot 16800 = 11760$ en $j_4 = 4 \cdot v_3 = 4 \cdot 8232 = 32928$.
Voor de rij $v_n$ zijn de opvolgende vier termen dus gelijk aan 2940, 4200, 8232 en 11760.
Voor de rij $j_n$ zijn de opvolgende vier termen dus gelijk aan 6000, 11760, 16800 en 32928.

(c) Er geldt $v_n = 0,7 \cdot j_{n-1} = 0,7 \cdot 4 \cdot v_{n-2} = 2,8 \cdot v_{n-2} = (2,8)^2 \cdot v_{n-4} = ... = (2,8)^{n/2} \cdot v_0 = (2,8)^{n/2} \cdot 1500$. Dus $v_n = (2,8)^{n/2} \cdot 1500$ voor $n$ een even getal.
Zo ook $j_n = 4 \cdot v_{n-1} = 4 \cdot 0,7 \cdot j_{n-2} = 2,8 \cdot j_{n-2} = (2,8)^2 \cdot j_{n-4} = ... = (2,8)^{n/2} \cdot 4200$. Dus $j_n = (2,8)^{n/2} \cdot 4200$ voor $n$ een even getal.

(d) Er geldt $v_n = 0,7 \cdot j_{n-1}$. Als $n$ een oneven getal is dan is $n-1$ een even getal. Dan kunnen we nu de directe formule voor $j_n$ uit opgave (c) gebruiken, ofwel $v_n = 0,7 \cdot j_{n-1} = 0,7 * (2,8)^{(n-1)/2} \cdot 4200$. Op dezelfde manier kunnen we ook een directe formule voor $j_n$ bepalen: $j_n = 4 \cdot v_{n-1} = 4 \cdot (2,8)^{(n-1)/2} \cdot 1500$.

## 4 Iteratiefunctie

(a) Via het rijenscherm kan de iteratiefunctie worden ingevuld. Dit geeft dan $u_{16} \approx 2,57$.

(b) Het dekpunt van de rij $u_n$ is een getal $x$ waarvoor geldt dat $F(x) = x$. Dit geeft $4 - \frac{5}{9}x \Rightarrow \frac{14}{9}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\frac{14}{9}} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$.
Dus $d = \frac{18}{7}$.

(c) $|u_0 - d| = |25 - \frac{18}{7}| = \frac{157}{7}$.
$|u_1 - d| = |-\frac{5}{9}| \cdot |u_0 - d| = \frac{5}{9} \cdot \frac{157}{7} = \frac{785}{63}$.
$|u_2 - d| = |-\frac{5}{9}| \cdot |u_1 - d| = \frac{5}{9} \cdot \frac{785}{63} = \frac{3925}{567}$.

(d) $|u_n - d| = \frac{5}{9} \cdot |u_{n-1} - d| = (\frac{5}{9})^2 \cdot |u_{n-2} - d| = ... = (\frac{5}{9})^n \cdot |u_0 - d| = (\frac{5}{9})^n \cdot \frac{157}{7}$.

# 5 Limieten

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+100n}}{\sqrt{6n^3+50}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+100n}}{\sqrt{6n^3+50}} \cdot \frac{\sqrt{1/n^3}}{\sqrt{1/n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+100/n^2}}{\sqrt{6+50/n^3}} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{6+0}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n+2} \cdot \frac{(1/5)^n}{(1/5)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3/5)^n-(2/5)^n}{1+2\cdot(1/5)^n} = \frac{0-0}{1+2\cdot 0} = 0$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^0 + a^1 + ... + a^n = \frac{1}{a-1}(a^{n+1}-1)$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a-1}(a^{n+1}-1) = \frac{1}{a-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(a^{n+1}-1) = \frac{1}{a-1} \cdot (0-1) = \frac{1}{1-a}$.
Dus $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.