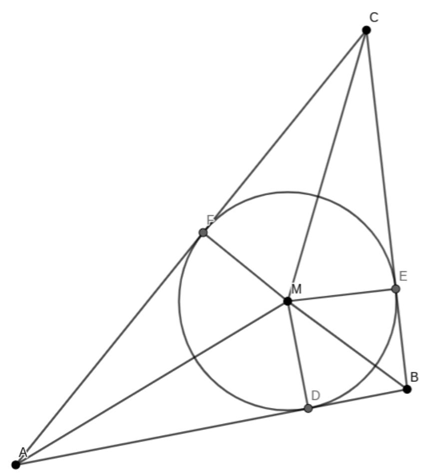
Wiskunde D Online Oefentoets
(antwoorden)

5VWO - Blok 8 Vlakke Meetkunde

1 Ingeschreven cirkel

Getekend zijn de lijnen vanuit M loodrecht op de zijden AB, BC en AC.



Om te bewijzen dat M het middelpunt van de cirkel is moeten we aantonen dat $|MD| = |ME| = |MF|$. Dit doen we door middel van driehoeks-congruentie. Bekijk de driehoeken AMD en AMF. Hier:

1. $AM = AM$
2. $\angle MAD = \angle MAF$ (*bissectrice*)
3. $\angle MDA = 90° = \angle MFA$ (*M loodrecht op AB en AC*)

Met de congruentie-eigenschap ZHH kunnen we concluderen dat driehoeken AMD en AMF congruent zijn. Hieruit volgt dat $|MD| = |MF|$.
Hetzelfde kunnen we doen met de driehoeken CME en CMF. Hier:

1. $CM = CM$
2. $\angle MCE = \angle MCF$ (*bissectrice*)

3. $\angle MEC = 90° = \angle MFA$ (*M loodrecht op BC en AC*)

Opnieuw kunnen we met de congruentie-eigenschap ZHH concluderen dat de driehoeken CME en CMF congruent zijn en dus $|ME| = |MF|$. Nu $|MD| = |ME| = |MF|$ en dus is M het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

2 Aangeschreven cirkel

(a) Uit opgave 1 weten we dat M op de bissectrice van A ligt. A, M en N liggen dan op één lijn als ook N op de bissectrice van A ligt. Dit is zo als de loodrechte afstand van N tot de verlengde lijn AC even groot is als de loodrechte afstand van N tot de verlengde lijn AB. Omdat N het middelpunt van de aanschreven cirkel is klopt dit en dus ligt N op de bissectrice van A. Ofwel, A, M en N liggen op één lijn.

(b) Zij M' het snijpunt van de loodrechte projectie van M op zijde AC en zij N' het snijpunt van de loodrechte projectie van N op het verlengde van zijde AC.

1. $|NN'| = 2 \cdot |MM'|$ *(gegeven)*
2. $\angle A = \angle A$
3. $\angle AM'M = \angle AN'N = 90°$ *(loodrechte projectie)*

Met de gelijkvormigheid-eigenschap zhh kunnen we concluderen dat driehoeken AMM' en ANN' gelijkvormig zijn. Omdat $|NN'| = 2 \cdot |MM'|$ volgt ook dat $|AN| = 2 \cdot |AM|$.

3 Ster

1. $\angle CMD = 2 \cdot \angle A$ *(stelling vd omtrekshoek)*
2. $\angle DME = 2 \cdot \angle B$ *(stelling vd omtrekshoek)*
3. $\angle AME = 2 \cdot \angle C$ *(stelling vd omtrekshoek)*
4. $\angle AMB = 2 \cdot \angle D$ *(stelling vd omtrekshoek)*
5. $\angle BMC = 2 \cdot \angle E$ *(stelling vd omtrekshoek)*
6. $\angle CMD + \angle DME + \angle AME + \angle AMB + \angle BMC = 360°$
7. $2 \cdot (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E) = 360°$

Dus $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°$.

4 Koordenvierhoek maken

(a) $\angle CMB = 2 \cdot \angle CAB$ *(stelling vd omtrekshoek)*
$\angle CBM = \angle BCM$ *(gelijkbenige driehoek CMB)*
$\angle CBM + \angle BCM + \angle CMB = 180°$ *(hoekensom driehoek)*
$2 \cdot \angle CBM + \angle CMB = 180°$
$\angle CBM = \frac{1}{2}(180° - \angle CMB)$
$\angle CBM = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot \angle CAB) = 90° - \angle CAB$
Dus $\angle CBM = 90° - \angle CAB$.

(b) $\angle BQP = 90° - \angle CBM$ *(hoekensom driehoek)*
$\angle BQP = 90° - (90° - \angle CAB) = \angle CAB$
$\angle CQP = 180° - \angle BQP$ *(gestrekte hoek)*
$\angle CQP = 190° - \angle CAB$
$\angle CQP + \angle CAB = 180°$
Dus $APQC$ is een koordenvierhoek.

5 Vierhoek

Construeer als eerst vierhoek $ABCD$. Om het punt E te vinden maken we gebruik van de stelling van de omtrekshoek.

Lijnstuk AD ligt op een cirkelboog.We zijn op zoek naar een cirkel met middelpunt M zodanig dat
$\angle AMD = 2 \cdot \angle AED = 2 \cdot 69° = 138°$. Driehoek AMD is gelijkbenig dus $\angle MAD = \angle MDA = \frac{180° - 138°}{2} = 21°$. Teken punt M zodanig dat $\angle MAD = \angle MDA = 21°$. Nu kunnen we de cirkel met middelpunt M en straal AM tekenen (oranje cirkel).

Op eenzelfde manier kunnen we een cirkel tekenen waar lijnstuk BD op ligt (blauwe cirkel). Het snijpunt van deze cirkels, binnen de vierhoek $ABCD$, is het punt E.