Wiskunde D Online Blok 12 Les 3 Huiswerk

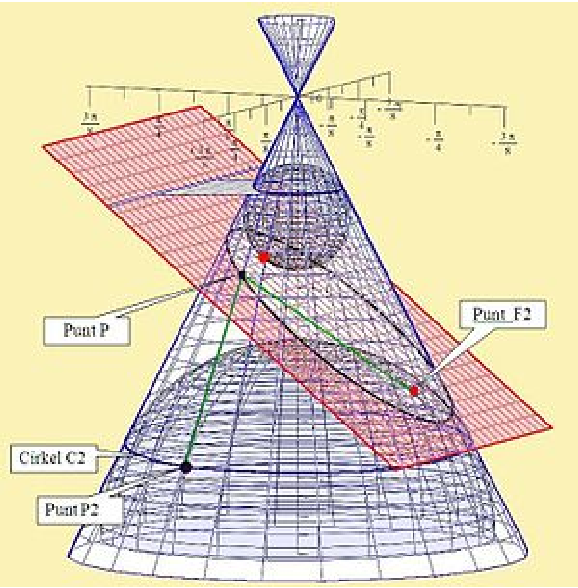
Opgave 1

De Dandelinsferen (bollen van Dandelin) zijn twee bollen in de kegel die zowel raken aan de kegel als aan het snijvlak – zie het plaatje hieronder.

Uit Wikipedia:

“De eerste stelling van Dandelin, die hieronder wordt aangetoond in het geval van een ellips, zegt:

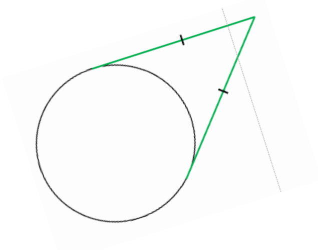
> De twee Dandelinsferen raken het vlak in de brandpunten van de kegelsnede die de snijding is van de kegel en het vlak.



Dandelin formuleerde een verrassend eenvoudig bewijs:

Je hebt daarbij een aantal keer het onderstaande basis principe nodig.

Basisprincipe:
Stel dat men vanuit een punt buiten een cirkel de twee raaklijnen aan de cirkel tekent. Dan is de afstand van dat punt tot elk van de raakpunten gelijk.
Hetzelfde geldt voor een punt dat buiten een boloppervlak of sfeer ligt. Indien men vanuit het punt twee lijnen neemt die de bol raken, zijn de afstanden van het punt tot elk van de twee raakpunten gelijk.



Neem nu een punt P op de ellips, zoals aangegeven op de figuur. Neem vervolgens de lijn door de top van de kegel en door dit punt P. Deze snijdt de raakcirkel van de onderste Dandelinsfeer in punt P_2. Teken ook de lijnstuk van P naar het raakpunt F_2 van de onderste Dandelinsfeer aan het snijvlak. Dan is wegens het hierboven vermelde basisprincipe de afstand $d(P, P_2)$ gelijk aan $d(P, F_2)$, want deze twee lijnstukken, beide groen op de figuur, raken vanuit P beide de onderste Dandelinsfeer.

Op dezelfde manier zie je dat de afstand $d(P, P_1)$ van het punt P tot de raakcirkel aan de bovenste Dandelinsfeer even groot is als de afstand van P tot het raakpunt F_1 van de bovenste Dandelinsfeer aan het snijvlak. Dus geldt:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, P_1) + d(P, P_2)$$

Het rechterlid van deze gelijkheid is echter constant want het is gelijk aan de afstand K tussen de twee raakcirkels, die evenwijdig zijn. Dus geldt voor alle punten van de ellips:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = K$$

De enige punten waarvoor dit geldt zijn per definitie de brandpunten van de ellips.

Deze redenering kan worden aangepast in het geval het vlak de kegel snijdt volgens een parabool of een hyperbool.”

Opgave: doe dat voor de hyperbool en schrijf het in je eigen woorden op.