Poisson Verdeling

Inhoudsopgaveg

De Poisson verdeling

Herziene uitgave 2016 voor wiskunde D_online vwo 5

Colofon

Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

Website www.wageningse-methode.nl

1 Wachten

Een winkel heeft gemiddeld per uur 10 klanten.
Wat is de kans dat in de komende vijf minuten geen klant komt?

Dit is een voor de handliggende vraag. Met de kansrekening die je tot nu toe geleerd hebt kun je deze vraag niet beantwoorden. We gaan proberen grip te krijgen op deze vraag. We nemen aan dat de klanten onafhankelijk van elkaar in de winkel komen. Ook nemen we aan dat elk moment van binnenkomst voor elk van de klanten even waarschijnlijk.

1 We nummeren de tien klanten die gemiddeld per uur in de winkel komen: 1, 2, 3, … , 10; bijvoorbeeld op volgorde van lichaamslengte (de kleinste krijgt nummer 1), of op grond van iets anders dat niets met hun aankomsttijden te maken heeft.
a. Wat is de kans dat klant nummer 1 niet in de komende vijf minuten arriveert?
b. Wat is de kans dat klant nummer 7 niet in de komende vijf minuten arriveert?
c. Wat is de kans dat geen van de tien klanten in de komende vijf minuten arriveren?

Klaar is Kees? Misschien denk je dat hiermee de vraag beantwoord is. Maar er was gegeven dat er *gemiddeld* tien klanten per uur zouden komen. Dat is iets anders dan dat er elk uur *precies* tien klanten komen. En waarom kijken we per uur. Je zou het gegeven ook kunnen vervangen door: "er komen gemiddeld twintig klanten per twee uur".

2 **a.** Bereken uitgaande van 20 klanten per twee uur wat de kans is op geen klanten in de komende vijf minuten.
b. Vergelijk je antwoord met dat van de vorige opgave.

Je antwoorden zijn niet gelijk, maar verschillen ook weer niet zo heel veel.

3 **a.** Wat is - onder de aanname dat er (precies) tien klanten per uur komen – de kans op precies 1 klant in de komende vijf minuten?
b. En op precies twee klanten de komende vijf minuten?

Onder de aanname dat er (precies) tien klanten per uur komen, is het aantal klanten in de komende vijf minuten binomiaal verdeeld met parameters n = 10 en "succes"-kans $p = \frac{1}{12}$.

Dat is een goede reden om nog eens naar de binomiale verdeling te kijken, en wel zonder GR.

Gegeven: er zullen onafhankelijk van elkaar 10 klanten komen tussen 14:00 en 15:00 uur.
We gaan zonder Grafische Rekenmachine de kans berekenen dat 3 van de 10 klanten tussen 14:15 en 14:30 uur komen. Zodoende wordt de theorie nog eens duidelijk.

4 Het aantal klanten dat tussen 14:15 en 14:30 uur arriveert is een typisch voorbeeld van een binomiaal verdeelde stochast.
Eén deelexperimentje dat hier speelt is: een klant komt in de winkel.
Die komt tussen 14:15 en 14:30 uur met kans ¼: de zogenaamde succeskans, meestal p geheten.
Er zijn 10 klanten: het experimentje wordt dus 10 keer herhaald: n = 10.
Het aantal klanten dat tussen 14:15 en 14:30 uur komt noemen we X.

a. Welke waarden kan X aannemen?

We nummeren de klanten 1 t/m 10.
b. Wat is de kans dat klant 2, 6 en 9 tussen 14:15 en 14:30 uur komen en alle andere niet?

Deze mogelijkheid noteren we met: NJNNNJNNJN.
c. Hoeveel rijtjes zijn er met 3 J's en 7 N's?

Al die rijtjes hebben dezelfde kans; die kans heb je in onderdeel b berekend.
d. Wat is dus P(X=3), de kans dat er drie klanten tussen 14:15 en 14:30 uur komen?

De afleiding van de binomiale verdeling
In opgave 4 werd gevraagd naar de kans op 3 successen, als het aantal herhalingen n = 20 is en de succeskans $p = \frac{1}{4}$. De kans op één speciaal rijtje met 3 successen (en dus 7 mislukkingen) is $(\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{3}{4})^7$.

Er zijn $\binom{10}{3}$ van zulke rijtjes.

Dus is de kans op 5 successen: $\binom{10}{3} \cdot (\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{3}{4})^7$.

5 Jan zit in een klas van 25 leerlingen.
a. Bereken zonder gebruik te maken van de GR de kans dat er precies twee klasgenoten zijn die in dezelfde week jarig zijn als Jan. Je kunt aan het eind wel een gewoon rekenmachientje gebruiken.
b. Controleer je antwoord op de GR.

6 Een vliegtuig heeft 200 zitplaatsen. Van de geboekte vluchten komt 5% van de passagiers niet opdagen. Daarom verkoopt de maatschappij niet 200 maar 204 zitplaatsen.
a. Bereken zonder GR de kans dat er precies één zitplaats te weinig zal blijken te zijn.
b. Controleer die kans op de GR.

Algemeen
Laat X het aantal successen zijn bij een binomiaal kansexperiment met n herhalingen, elk met succeskans p, dan is $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, voor $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

7 **a.** De formule laat zich vereenvoudigen in het geval $p = ½$. Hoe?
b. Welke afspraak moet je maken voor 0^0 om de formule ook te laten gelden in het geval $p = 0$?

8 Het binomium van Newton luidt: $(a+b)^n =$

$$\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot b^0$$

Hierin zijn a en b willekeurige reële getallen en is n een positief geheel getal.
In de Appendix C wordt deze formule afgeleid.
a. Hoe ziet de formule eruit in de gevallen $n = 1$ en $n = 2$?
b. Leg uit dat uit het binomium van Newton volgt:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

c. Neem $b = 1 - a$. Wat is de uitkomst van:

$$\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot (1-a)^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot (1-a)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot (1-a)^0 \,?$$

Wat betekent dat in termen van een binomiaal kansexperiment?

De naam "binomiale verdeling" komt van het binomium van Newton. En die formule heeft zijn naam te danken aan het feit dat $a+b$ een tweeterm (binomium) is. De formule zegt dus hoe een macht van een tweeterm kan worden uitgewerkt.

De vraag waarmee we deze paragraaf begonnen is van het volgende type:

gegeven een *gemiddeld* aantal per tijdseenheid,
gevraagd de kans op een zeker aantal tijdens een tijdsinterval.

Dit type komt vaak voor. Bijvoorbeeld:

- het aantal brandmeldingen op een dag als er gemiddeld 523 zijn per jaar
- het aantal telefoontjes dat de belastingdienst in een uur krijgt als er gemiddeld 444 per dag binnenkomen
- het aantal dodelijke ongevallen van fietsers op een dag als er gemiddeld 120 per jaar zijn
- het aantal typfouten op een bladzijde, als er gemiddeld 292 zijn in een boek van 400 bladzijden.

9 Verzin zelf ook twee (heel) andere voorbeelden van dit type.

"Al onze medewerkers zijn in gesprek; u wordt zo spoedig mogelijk geholpen."

Wachten is irritant en meestal tijdverspilling. In totaal wacht een mens een heel jaar van zijn leven: op de bus, op een telefoontje, in de file, voor het verkeerslicht, voor de kassa, op de krant, op het weekend, bij een telefonische hulpdienst.

Geen wonder dat wachten een hot item is in de moderne maatschappij. Wachttijdtheorie is een onderdeel van de kansrekening. Centrale vragen daarin zijn:

- als er gemiddeld vijf klanten per uur komen, hoeveel mag je er dan in het komende kwartier verwachten?
- als je gemiddeld 20 minuten moet wachten op een lift, hoe groot is dan de kans dat je meer dan 1 uur op een lift moet wachten.
- hoeveel kassa's moeten er zijn om de wachttijd minder dan 5 minuten te houden?

2 De Poissonverdeling

Stel dat er in een winkel gemiddeld 10 klanten per uur komen.
Wat is dan de kans dat er in het komende kwartier precies 3 klanten komen.

Dit is het centrale thema van deze paragraaf. Wij gaan die kans precies berekenen

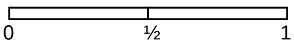
10 **a.** Waarom is het belangrijk voor de winkelier (bedrijfsleiding) om te weten wat de kans is op 3 klanten in een kwartier?
b. Hoe groot schat jij de kans op 3 klanten in een kwartier als er gemiddeld 10 per uur komen? Het gaat erom of je een idee hebt; je kunt natuurlijk onmogelijk zomaar die kans berekenen.

11 Stel dat je weet dat er komend uur precies 10 klanten komen. (Hoe je dat te weten bent gekomen doet er nu even niet toe.) Maar je hebt geen idee wanneer ze in die periode van een uur zullen komen: elk moment is voor elk van de klanten even waarschijnlijk.
Ze komen onafhankelijk van elkaar.
a. Wat betekent het dat ze onafhankelijk van elkaar komen?
b. Wat is de kans dat er 8 in het eerste halfuur komen en de andere 2 in het tweede halfuur?

Stel dat de winkelier geen personeel heeft en stel dat elke klant precies 5 minuten nodig heeft om geholpen te worden.
c. Hoe groot schat jij de kans dat geen enkele klant hoeft te wachten? Toelichten.

Sommige winkels proberen de wachttijden bewust klein te houden. Door deze service willen ze klanten winnen en vasthouden. Het is duidelijk dat het kunnen inschatten van wachttijden voor deze winkels erg belangrijk is. In dit hoofdstuk willen we zicht krijgen op deze problematiek.

We bekijken een periode van 1 uur als geheel en opgesplitst in twee periodes van ½ uur.
$P_1(n)$ is de kans op precies n klanten in dat uur,
$P_{½}(n)$ is de kans op n klanten in een halfuur,



12 Er geldt $P_1(0) = (P_{½}(0))^2$. Immers,
de kans op 0 klanten in een uur =
de kans op 0 klanten in het eerste half uur én 0 klanten in het tweede half uur =
de kans op 0 klanten in het eerste half uur ×
de kans op 0 klanten in het tweede half uur.

a. Druk zo ook $P_1(1)$ uit in $P_{½}(0)$ en $P_{½}(1)$.
b. Druk $P_1(3)$ uit in $P_{½}(0)$, $P_{½}(1)$, $P_{½}(2)$ en $P_{½}(3)$.

Als er 7 klanten in het eerste halfuur komen én 0 in het tweede halfuur, dan komen er 7 klanten in het hele uur én die 7 komen allemaal in de eerste helft van dat uur.
Dit vertalen we in kansen:

$$P_{½}(7) \times P_{½}(0) = P_1(7) \times (½)^7. \qquad (1)$$

13 a. Een zelfde redenering geeft:

$$P_{½}(6) \times P_{½}(1) = P_1(7) \times \_\_\_. \text{ Vul in.} \qquad (2)$$

$P_1(7)$ kennen we (nog) niet, maar die kans kunnen we weg laten vallen. Vergelijk maar de gelijkheden (1) en (2).

b. Leg uit dat hieruit volgt dat $P_{½}(7) = \frac{1}{7} \cdot \frac{P_{1/2}(1)}{P_{1/2}(0)} \cdot P_{½}(6)$.
c. Druk zo ook $P_{½}(n)$ uit in $P_{½}(n-1)$.
d. Controleer of de formule uit onderdeel **c** klopt voor het geval $n = 1$.

14 Als we $P_{½}(0)$ en $P_{½}(1)$ zouden kennen, zouden we alle kansen $P_{½}(n)$ kennen. Het gaat trouwens niet om de kansen $P_{½}(0)$ en $P_{½}(1)$ zelf, maar om hun verhouding $\frac{P_{1/2}(1)}{P_{1/2}(0)}$. Die verhouding noemen we λ.

a. Druk achtereenvolgens $P_{½}(1)$, $P_{½}(2)$, $P_{½}(3)$, $P_{½}(4)$ en $P_{½}(5)$ uit in λ en $P_{½}(0)$. (Gebruik opgave **13c**.)
b. Geef een formule voor $P_{½}(n)$, uitgedrukt in λ.

Als je $P_{½}(0)$ zou kennen, zou je λ kunnen uitrekenen (en omgekeerd, want de som van alle kansen $P_{½}(n)$ is 1.
Daarvoor moet je wel oneindig veel kansen optellen en dat is geen sinecure. We vinden:
$P_{½}(0) + P_{½}(1) + P_{½}(2) + P_{½}(3) + P_{½}(4) + \ldots =$
$P_{½}(0) + \lambda \cdot P_{½}(0) + \lambda^2/2! \cdot P_{½}(0) + \lambda^3/3! \cdot P_{½}(0) + \lambda^4?4! \cdot P_{½}(0) + \ldots =$
$P_{½}(0) \cdot (1 + \lambda + \lambda^2/2! + \lambda^3/3! + 0{,}1 \cdot \lambda^4 /4! + \ldots) =$
$P_{½}(0) \cdot e^{\lambda}$.
En dit moet dus 1 zijn.

Dat de oneindige som $1 + \lambda + \lambda^2/2! + \lambda^3/3! + \lambda^4/4! + \ldots = e^\lambda$ wordt uitgelegd in appendix A.

15 **a.** Neem $P_{½}(0) = 0{,}1$; dan is dus 10% kans dat er in een half uur geen klanten komen in de winkel.
Hoe groot is λ dan?

b. Laat zien dat algemeen geldt: $\lambda = \ln \frac{1}{P_{1/2}(0)}$.

Een voorval, bijvoorbeeld een klant komt binnen, kan optreden of niet. We nemen aan dat de voorvallen onafhankelijk van elkaar optreden. We tellen het aantal keer dat een voorval optreedt in een zekere tijdsperiode. Dat aantal noemen we *X*.

De verhouding $\dfrac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}$ noemen we λ.

Dan is de kans op *k* voorvallen in die tijdsperiode

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

We zeggen dat *X* Poissonverdeeld is met parameter λ.

16. We gaan de verwachtingswaarde van een Poissonverdeelde stochast *X* met parameter λ uitrekenen.
Die verwachtingswaarde is per definitie:
$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) + \ldots$
Dit is een oneindige som.

a. Laat zien dat

$$E(X) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right).$$

b. Bewijs dat $E(X) = \lambda$; gebruik de reeks in appendix A.

X is het aantal keer dat een voorval optreedt in een zekere tijdsperiode. De voorvallen treden onafhankelijk van elkaar op.
Zeg dat het voorval gemiddeld λ keer in de tijdsperiode optreedt (dat is dus de verwachtingswaarde).
Dan is *X* **Poissonverdeeld** met parameter λ:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k\,!} \cdot e^{-\lambda} \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

17 Het aantal klanten per uur is X en heeft parameter λ.
Het aantal klanten per half uur is Y en heeft parameter ½λ.

In opgave **12a** heb je gezien dat $P(X=0) = (P(Y=0))^2$, zonder de kansen van de Poissonverdeling te gebruiken.
a. Controleer dat de gelijkheid geldt met de Poisson-kansen $P(X=0)$ en $P(Y=0)$.

In opgave **12b** heb je gezien dat $P(X=1) = 2 \cdot P(Y=0) \cdot P(Y=1)$, zonder de kansen van de Poissonverdeling te gebruiken.
b. Controleer dat de gelijkheid geldt met de Poisson-kansen $P(X=1)$, $P(Y=0)$ en $P(Y=1)$.

Terugblik

We zijn geïnteresseerd in de kansverdeling van het aantal voorvallen in een uur als er gemiddeld λ voorvallen per uur plaatsvinden.
We nemen aan dat de voorvallen onafhankelijk van elkaar plaatsvinden.
We hebben gezien:

- Het aantal voorvallen per uur hangt samen met het aantal voorvallen per half uur.
- De kans op 7 voorvallen in een uur gelijk is aan 1/7 × λ de kans op 6 voorvallen in een uur, enz.
- De kans op 7 voorvallen in een uur is 1/7! × λ × de kans op 0 voorvallen in een uur.
- Omdat alle kansen samen 1 zijn, kon de kans op 0 voorvallen in een uur worden uitgerekend: die is $e^{-\lambda}$.

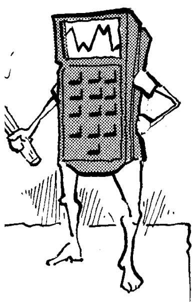
Als er per uur gemiddeld 24 klanten (onafhankelijk van elkaar) in een winkel komen, komen er natuurlijk gemiddeld 12 klanten per half uur.
Daar zal niemand aan twijfelen. Dat kun je ook formeel bewijzen. Als volgt.
Het aantal klanten X dat in een uur komt is Poisson-verdeeld met parameter $\lambda = 24$.
Het aantal klanten Y in een halfuur is ook Poisson-verdeeld. We gaan bewijzen dat de parameter van Y 12 is.
Splits een uur op in twee halve uren. Het aantal klanten in het eerste halfuur noemen we Y_1 en in het tweede halfuur Y_2.
Dan $X = Y_1 + Y_2$; dus $E(X) = E(Y_1) + E(Y_2)$.
Omdat $E(Y_1) = E(Y_2)$, volgt hieruit dat $E(Y) = ½ \cdot 24$ en dat is de parameter.

Als het aantal klanten in 1 uur Poissonverdeeld is met gemiddelde λ, dan is het aantal klanten in ½ uur Poissonverdeeld met gemiddelde ½ λ.

Algemeen Het aantal klanten in *t* uur Poissonverdeeld met gemiddelde $t \cdot \lambda$.

18 In een jaar komen er gemiddeld 123 brandmeldingen voor in een zekere stad.
a. Bereken de kans dat er morgen precies twee brandmeldingen zijn.

Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer.
b. Bereken de kans dat er morgen drie fietsdoden vallen.



Op de GR (TI84)
2ND DISTR

- poissonpdf (λ,*k*) geeft de kans op *k* voorvallen bij een Poissonverdeling met parameter λ.
- poissoncdf (λ,k) geeft de kans op hoogstens *k* voorvallen bij een Poissonverdeling met parameter λ.

19 **a.** Controleer je antwoorden op opgave **17** met de GR.

Gemiddeld worden er elke dag in Nederland 496 baby's geboren.
b. Wat is de kans dat er morgen niet meer dan 450 baby's geboren worden in Nederland.

Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer.
c. Bereken de kans dat er in een jaar minder dan 800 fietsdoden vallen in het verkeer.

20 Gegeven zijn twee Poissonverdeelde stochasten *X* en *Y* die onafhankelijk zijn van elkaar, met parameter λ en μ. Dan is *X*+*Y* ook Poissonverdeeld en wel met parameter λ+μ. We gaan dit bewijzen.
a. Ga na dat P(*X*+*Y*=10) =
$P(X=0) \cdot P(Y=10) + P(X=1) \cdot P(Y=9) + P(X=2) \cdot P(Y=8) + \ldots + P(X=10) \cdot P(Y=0)$.
b. Vul hierin de Poissonkansen in en laat zien dat de som gelijk is aan $\frac{(\lambda+\mu)^{10}}{10!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)}$.
Tip: Binomium van Newton; zie appendix B.

c. Ga na dat hiermee de belofte van deze opgave is ingelost.

Intuïtief is het resultaat van de vorige opgave duidelijk: als de ene winkel gemiddeld λ klanten per uur krijgt en de andere winkel μ klanten, dan krijgen ze samen λ+μ klanten per uur.

21 Twee winkels zijn elkaars concurrenten. De aantallen klanten *X* en *Y* die deze per uur krijgen zijn Poisson-verdeeld met gemiddelden respectievelijk 1 en 2.

Een klant gaat naar een van de twee winkels.
a. Wat is, denk je, de kans dat hij naar de eerste winkel gaat?

Waarschijnlijk heb je bij onderdeel **a** intuïtief de juiste kans gegeven. We gaan die kans berekenen.Bedenk dat:
P(de winkels krijgen samen 1 klant) · P(die ene klant gaat naar de 1ste winkel) =
P(de 1ste winkel krijgt 1 klant en de 2de winkel krijgt 0 klanten) =
P(de 1ste winkel krijgt 1 klant) · P(de 2de winkel krijgt 0 klanten).

b. Schrijf de drie Poissonkansen op:
P(de winkels krijgen samen 1 klant in een uur),
P(de 1ste winkel krijgt 1 klant in een uur) en
P(de 2de winkel krijgt 0 klanten in een uur).
c. Bereken hieruit P(de ene klant gaat naar de 1ste winkel).
Had je in onderdeel **a** dit antwoord?

Stel je weet dat er in totaal 7 klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten in welk van de twee winkels ze binnen zullen gaan.
d. Bereken de kans dat er 3 naar de eerste winkel gaan (en dus 4 naar de tweede).

Algemeen
Twee winkels zijn elkaars concurrenten. De aantallen klanten *X* en *Y* die deze per uur krijgen zijn Poisson-verdeeld met gemiddelden respectievelijk λ en μ. Stel je weet dat er in totaal *n* klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten naar welke van de twee winkels ze gaan.
Dan is het aantal klanten dat naar de eerste winkel gaat binomiaal verdeeld met *n* herhalingen en succeskans $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Speciaal bij zeldzame gebeurtenissen speelt de Poisson-verdeling een belangrijke rol.

22 Een zekere ziekte is zeer zeldzaam: één op de honderdduizend mensen heeft haar. De kans dat iemand de ziekte heeft is dus 0,00001.
De ziekte is niet overdraagbaar en ook niet erfelijk bepaald. We mogen het hebben-van-de-ziekte voor een individu dus onafhankelijk beschouwen van het al dan niet hebben-van-de-ziekte van andere personen.

Er zijn 800 duizend Amsterdammers. Het aantal Amsterdammers dat de ziekte heeft noemen we X.
a. Wat is de verwachtingswaarde van X?

Elke Amsterdammer heeft kans 0,00001 om de ziekte te hebben, onafhankelijk van zijn stadsgenoten. Dus X is binomiaal verdeeld met parameters n = 800000 en p = 0,00001.
b. Bereken P(X=6).

De stochast Y is Poissonverdeeld met parameter λ = 8.
c. Bereken P(Y=6).

Als het goed is, heb je in b en c (nagenoeg) hetzelfde antwoord gekregen. Hoe kun je dat begrijpen?
We gaan daartoe P(X=6) uitrekenen zonder GR:

$P(X=6) = \binom{800000}{6} \cdot 0{,}00001^6 \cdot 0{,}99999^{799994}$.

$\binom{800000}{6} = \frac{800000 \cdot 799999 \cdot 799998 \cdot 799997 \cdot 799996 \cdot 799995}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx \frac{800000^6}{6!}$

en dus $\binom{800000}{6} \cdot 0{,}00001^6 \approx \frac{8^6}{6!}$

d. Ga dat na.
e. Ga na dat $0{,}99999^{799994} \approx 0{,}99999^{800000}$, omdat de twee getallen een factor $0{,}99999^6$ verschillen en die is nagenoeg 1.
f. Ga na dat $0{,}99999^{800000} = (1 - \frac{8}{800000})^{800000}$.
De laatste uitdrukking is nagenoeg gelijk aan e^{-8}. Er geldt namelijk:
$(1 - \frac{x}{n})^n \approx e^{-x}$ als n groot is en x relatief klein. Ook geldt dan: $(1 + \frac{x}{n})^n \approx e^{x}$. Het bewijs van deze stelling staat in appendix C.

g. Laat zien dat uit de onderdelen **d**, **e** en **f** volgt dat P(X=6) ≈ P(Y=6).

X is binomiaal verdeeld met parameters n en p, waarbij p klein en n groot is,
Y is Poissonverdeeld met parameter $\lambda = p \cdot n$.
Dan zijn $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en $P(Y=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ nagenoeg gelijk.
Dus hebben X en Y nagenoeg dezelfde kansverdeling.

Op blz 41 wordt deen de verdelingen vergeleken in het geval $\lambda = 2$, $p = 0{,}02$ en $n = 100$.

Opmerking
Rekenmachines hebben een beperkt rekendomein. Op mijn machine moet de parameter n bij de binomiale verdeling kleiner dan 1 miljoen zijn. Als n groter dan 1 miljoen is (en p klein) brengt de Poissonverdeling uitkomst.

23 De zeldzame ziekte van de vorige opgave komt voor bij 1 op de 100000 mensen. Nederland telt 17 miljoen mensen.
Bereken de kans dat er in Nederland ten hoogste 185 mensen met de ziekte zijn.

Simeon-Denis Poisson
(1781-1840)

In 1837 introduceerde de Franse wiskundige Poisson een benadering van de binomiale kansverdeling. Hij bekeek de al geruime tijd bekende binomiale verdeling voor gevallen waarbij het aantal herhalingen n heel groot is en de succeskans p heel klein. Hij liet zien dat de binomiale kans op k successen $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ nagenoeg gelijk is aan $e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$, waarin $\lambda = n \cdot p$ de verwachtingswaarde van X is.
Dat is precies wat we in opgave **22** hebben laten zien.

Voor deze verdeling hoef je de kans op succes per kansexperiment niet te weten. Als verwachtingswaarde λ gebruik je het gemiddelde aantal "successen" bij een aantal series van n kansexperimenten.
Poisson besteedde niet meer dan één bladzijde aan zijn ontdekking.


Ludwig von Bortkiewicz

De Duitse wiskunde L. von Bortkiewicz was de eerste die het belang van de Poissonverdeling onderkende. Van hem is het volgende voorbeeld afkomstig.
Hij bekeek het aantal doden per jaar onder de Pruisische cavaleristen door een trap van een paard. Er zijn inderdaad veel herhalingen met een zeer kleine "succes"-kans (een dodelijke trap van een paard).

Het veelvuldig optreden van Poissonkansen in het dagelijks leven is niet zo vreemd als je dit voorbeeld bekijkt. In veel praktische situaties is er sprake van een zeer groot aantal uitvoeringen en een zeer kleine (onbekende) succeskans.

24 von Bortkiewicz telde in 14 regimenten over 20 jaren (1875 t/m 1894) in totaal 196 doden door een trap van een paard. Hij concludeerde dat per regiment per jaar het aantal door een trap van een paard gedode cavaleristen Poissonverdeeld was met verwachtinggswaarde 0,7.
Bereken de kansen dat in een regiment in een jaar 0, 1 en 2 doden vielen door een trap van een paard.

25 De lotto is een kansspel. De speler kruist zes nummers aan uit 1 t/m 45 en kiest een van de zes mogelijke kleuren. De notaris trekt ook zes nummers en een kleur; als die nummers precies hetzelfde zijn aan de zes die de speler koos, en bovendien de kleur hetzelfde is, wint hij de jackpot.
a. Ga na dat de kans daarop $2{,}05 \cdot 10^{-8}$ is.

Stel dat er in een week 1 miljoen lottoformulieren worden ingevuld. De jackpot valt als iemand de juiste zes nummers én de juiste kleur heeft gekozen.

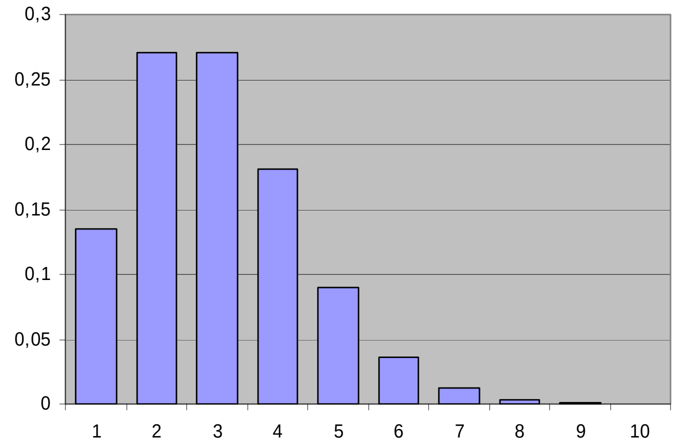
b. Bereken de kans dat de jackpot in een zekere week niet valt.

Als meer dan een speler alles goed heeft, moeten de gelukkigen de jackpot delen.
c. Bereken de kans dat de jackpot moet worden gedeeld.

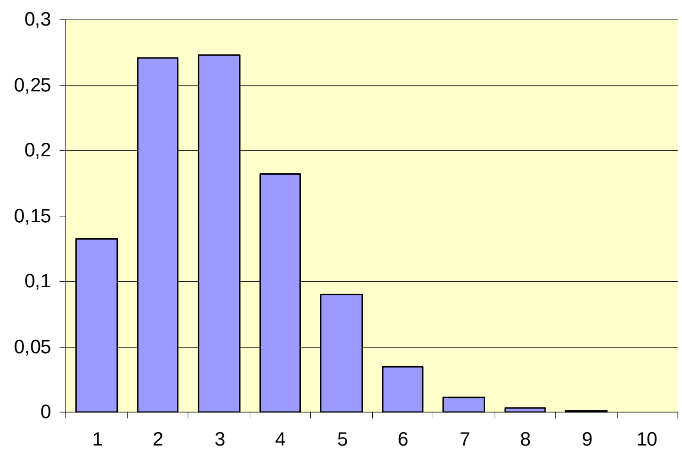
Vergelijk de kansverdelingen met dezelfde verwachtings-waarde:

- Poisson met λ = 2
- Binomiaal met n = 100 en p = 0,02

Poisson λ = 2



Binomiaal *p* =0,02, *n* =100



3 Wanneer komt de volgende klant?

Vraag
Het aantal klanten is Poissonverdeeld met gemiddelde 3 per uur.
Wat is de kans dat de eerste klant ten minste 0,5 uur op zich laat wachten?

Berekening
Het aantal klanten per half uur is Poissonverdeeld met gemiddelde ½ · 3 = 1,5.
De eerste aankomsttijd (in uren) noemen we *T*; dat is de tijd die het duurt voordat de eerste klant binnenkomt.
$P(T \geq 0{,}5)$ = P(0 klanten in de eerste 0,5 uur) =
$\frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$.

26 We gaan verder met de context van bovenstaande vraag.
a. Bereken de kans dat de eerste klant meer dan ½ uur, maar minder dan 1½ uur op zich laat wachten.
b. Bereken de kans dat de derde en vierde klant in het derde kwartier komen.
Tip: Dan moeten in het eerste halfuur 2 klanten komen en in het daarop volgende kwartier ook 2.

27 Het aantal klanten *X* is Poissonverdeeld met gemiddelde λ per uur.
T is de tijd die het duurt voordat de eerste klant komt.
a. Welke waarden kan *T* aannemen?
b. Is *X* discreet of continu verdeeld? En *T*?
c. Bewijs dat $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, voor alle $t > 0$.
d. Controleer de formule in onderdeel c voor de “randgevallen" $t = 0$ en t nadert tot oneindig.

Als een aantal "successen" *X* Poissonverdeeld is met gemiddelde λ en *T* is de tijdsduur dat je op het eerste succes moet wachten,
dan $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

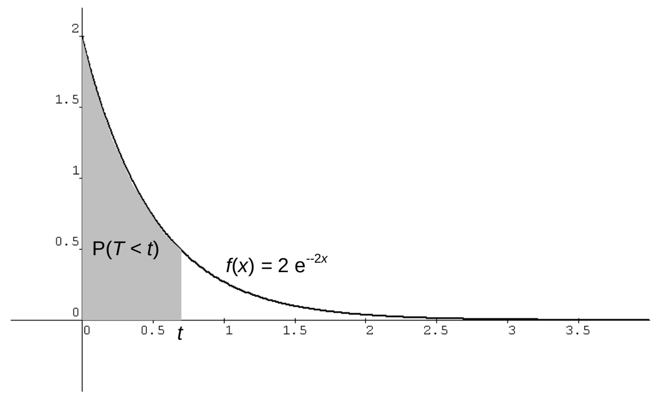
Definitie
Een stochast *T* heet **exponentiëel verdeeld** met parameter λ als *T* alle positieve getallen als waarde kan aannemen en $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ voor alle $t > 0$.

28 **a.** Teken de grafiek van de functie $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ als functie van t, voor enkele waarden van λ in één figuur.
F heet de **verdelingsfunctie** van *T*.

b. Teken de grafiek van de afgeleide $f = F'$ voor dezelfde waarden van λ, ook in één figuur.
f heet de **dichtheidsfunctie** van *T*.

c. Leg uit: $P(T \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

Stel dat een winkelier gemiddeld λ klanten per uur krijgt. De kans dat hij hoogstens *t* uur hoeft te wachten voordat de eerste klant komt, is dus de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, links van *t*.



Iets dergelijks heb je al eerder ontmoet: ook bij een normaalverdeelde stochast X zijn de kansen $P(X < t)$ de oppervlakte onder een grafiek, namelijk van de klok-kromme.

29 Study probeert elke vrijdagavond een lift te krijgen om het weekend bij haar ouders door te brengen. De helft van de keren duurt het minder dan 30 minuten voordat ze een lift krijgt.
a. Wat is de kans dat ze op een vrijdag binnen 5 minuten een lift krijgt?
b. En wat is de kans dat ze na 1 uur nog geen lift heeft.

30 Op een vrijdagavond heeft Study zonder succes al 40 minuten staan liften. Ze zegt bij zichzelf: "Ik sta hier nu al veertig minuten, terwijl ik gemiddeld niet meer dan een half uur op een lift hoef te wachten. Ik zal nu dus wel snel een lift krijgen."
Geef commentaar op Study's gedachte.

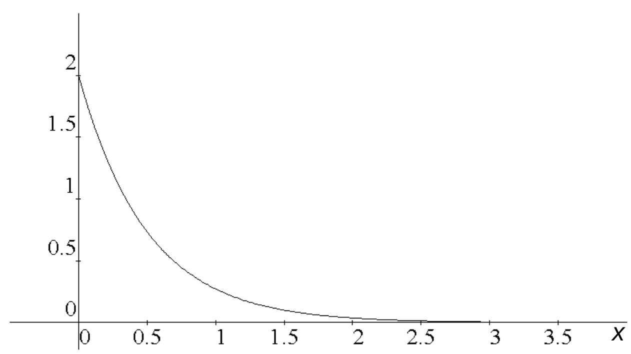
De exponentiële verdeling heeft geen geheugen. Dat betekent het volgende.
Als je al bijvoorbeeld 10 minuten (zonder succes) hebt staan liften, wordt de kans dat je een lift krijgt daar niet groter (of kleiner) door.

31 Choice speelt *Mens erger je niet.* Ze heeft op het ogenblik geen enkele pion op het speelbord. Pas als ze "een zes" (dat is 6 ogen) gegooid heeft, mag ze een pion op het bord zetten. De eerste vijf keer dat ze aan de beurt is, werpt ze 2, 2, 4, 1 en 5 ogen.
a. Wat is de kans dat ze in de volgende beurt 6 ogen werpt?
b. Heeft de dobbelsteen een geheugen?

Definitie
We zeggen dat een stochast X *geen geheugen* heeft, als
$P(X > a+b) = P(X > a) \cdot P(X > b)$ voor alle getallen a en b.
Ga na dat dit een verstandige definitie is.

32 Een exponentieel verdeelde stochast heeft geen geheugen.
Bewijs dat.
Tip: Pas de definitie op bladzijde 42 toe.

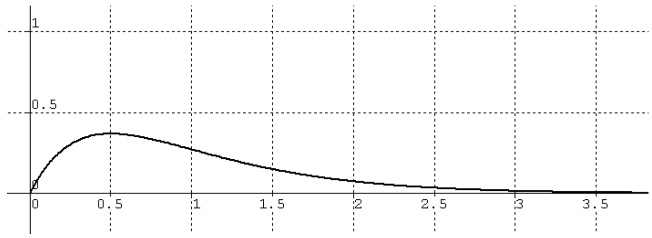
33 Hieronder staat de grafiek van de dichtheidsfunctie $f(x) = 2\,e^{-2x}$ van een exponentieel verdeelde stochast T met parameter 2.



Om de verwachtingswaarde van T te berekenen, moet je $x \cdot f(x)$ intereren van 0 tot oneindig: $\int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x}\,dx$.

In appendix D wordt toegelicht dat je zo de verwachtingswaarde van de continue stochast T met parameter 2 vindt.

Hieronder staat de grafiek van $x \cdot 2\,e^{-2x}$.



a. Maak een schatting van E(T), dat is de oppervlakte onder de grafiek.
b. Laat zien dat $y = -x\,e^{-2x} - ½\,e^{-2x}$ een primitieve is van $x \cdot 2\,e^{-2x}$.
c. Bereken E(T).

d. Hoe groot is de verwachtingswaarde van een exponentieel verdeelde stochast met parameter λ?

Hét voorbeeld van een exponentieel verdeelde stochast is de wachttijd.

34 Study gaat weer liften. Gemiddeld stopt er elke tien minuten een auto om een lifter mee te nemen. Als Study op de liftplaats aankomt, staan er al drie anderen te liften, die een voor een een lift moeten krijgen voor dat Study aan de beurt is.
a. Wat is de verwachtingswaarde van de wachttijd voor Study?
b. Wat is de kans dat Study binnen een half uur een lift heeft?

4 Appendix

A De e-macht als oneindige som

We gaan bewijzen dat de oneindige som
$1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + x^5 / 120 + \ldots$
gelijk is aan e^x, voor elk getal x.

35 Bekijk de functie
$y_5(x) = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + x^5 / 120$.
a. Bereken de afgeleide $y_5'(x)$.

$y_5'(x)$ lijkt veel op $y_5(x)$. Deze twee functies verschillen slechts één term, namelijk $x^5 / 120$. En als $|x| \leq 1$ is dat verschil kleiner dan 0,01.
b. Ga dat na.

Bekijk de functie
$y_{50}(x) = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + \ldots + x^{50} / 50!$
c. Bereken de afgeleide $y_{50}'(x)$.

$y_{50}'(x)$ lijkt veel op $y_{50}(x)$. Deze twee functies verschillen slechts één term, namelijk $x^{50} / 50!$. En als $|x| \leq 17$ is dat verschil kleiner dan 0,0011.
d. Ga dat na.

Bekijk de eindige som
$1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + \ldots + x^n / n!$
Dat is een functie y_n van x.
e. Wat is het verschil tussen $y_n'(x)$ en $y_n(x)$?

Voor elk getal x geldt:
De noemer $n!$ groeit op den duur (veel) sneller dan de teller x^n.
Daarom wordt het verschil tussen $y_n'(x)$ en $y_n(x)$ voor grote waarden van n willekeurig klein.
Voor de oneindige som
$y(x) = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + \ldots$ geldt dus:
$y'(x) = y(x)$.
De functie y is zijn eigen afgeleide!
En die functies kennen we: $y(x) = c \cdot e^x$, waarbij c een willekeurige constante is.

We moeten nog de waarde van c bepalen. Dat lukt omdat we $y(0)$ kunnen uitrekenen,
f. Wat is de waarde van c?

Ga na dat we hiermee onze belofte hebben ingelost:
$1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + x^5 / 120 + \ldots = e^x$.

B Het binomium van Newton

36 **a.** Schrijf zonder haakjes en met zo weinig mogelijk termen: $(x+y)^2$, $(x+y)^3$ en $(x+y)^4$.

Hoe gaat dit verder? Zit er enig systeem in? Wat zal $(x+y)^{10}$ opleveren? We gaan dat op verschillende manieren uitvinden.

Manier1: haakjes uitwerken
Het is duidelijk dat $(1+x)^7$een veelterm is van graad 7 dus een som van de vorm:
$\ldots + \ldots\cdot x + \ldots\cdot x^2 + \ldots\cdot x^3 + \ldots\cdot x^4 + \ldots\cdot x^5 + \ldots\cdot x^6 + \ldots\cdot x^7$.
Om hier beter over te kunnen praten geven we de coëfficiënten (de getallen op de puntjes) namen
$a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 + a_4\cdot x^4 + a_5\cdot x^5 + a_6\cdot x^6 + a_7\cdot x^7$.

Je weet waarschijnlijk bij voorbaat wel wat a_0 en a_7 zijn?
b. Wat zijn die?

Stel dat je de uitwerking van $(1+x)^7$ kent. Dan volgt daaruit de uitwerking van $(1+x)^8$ als volgt.
$(1+x)^8 = (1+x)\cdot(1+x)^7 = 1\cdot(1+x)^7 + x\cdot(1+x)^7 =$
$a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 + a_4\cdot x^4 + a_5\cdot x^5 + a_6\cdot x^6 + a_7\cdot x^7 +$
$x\cdot(a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 + a_4\cdot x^4 + a_5\cdot x^5 + a_6\cdot x^6 + a_7\cdot x^7) =$
$a_0 + (a_0+a_1)\cdot x + (a_1+a_2)\cdot x^2 + (a_2+a_3)\cdot x^3 + (a_3+a_4)\cdot x^4 +$
$(a_4+a_5)\cdot x^5 + (a_5+a_6)\cdot x^6 + (a_6+a_7)\cdot x^7 + a_8\cdot x^8$.
Als je dus de coëfficiënten van de uitwerking van $(1+x)^7$ kent, ken je die ook van de uitwerking van $(1+x)^8$: je moet gewoon steeds twee opvolgende coëfficiënten van de uitwerking van $(1+x)^7$ optellen.
Om aan de uitwerking van $(1+x)^7$ te komen, moet je het volgende schema invullen.

1

$1 + 1\,x$

$1 + \ldots\,x + 1\,x^2$

$1 + \ldots\,x + \ldots x^2 + 1\,x^3$

$1 + \ldots\,x + \ldots x^2 + \ldots x^3 + 1\,x^4$

$1 + \ldots\,x + \ldots x^2 + \ldots x^3 + \ldots x^4 + 1\,x^5$

$1 + \ldots\,x + \ldots x^2 + \ldots x^3 + \ldots x^4 + \ldots x^5 + 1\,x^6$

$1 + \ldots\,x + \ldots x^2 + \ldots x^3 + \ldots x^4 + \ldots x^5 + \ldots x^6 + 1\,x^7$

c. Vul de coëfficiënten van bovenaf in.

Dit schema is een oude bekende. Met precies hetzelfde schema maak je namelijk de driehoek van Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1
\end{array}$$

Kennelijk is de coëfficiënt van bijvoorbeeld x^5 in de uitwerking van $(1+x)^7$ gelijk aan $\binom{7}{5} = 21$.

d. Wat is de coëfficiënt van x^4 in de uitwerking van $(1+x)^{10}$?

Conclusie

$$(1+x)^{10} = \binom{10}{0}x^0 + \binom{10}{1}x^1 + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{3}x^3 + \binom{10}{4}x^4 + \binom{10}{5}x^5 + \binom{10}{6}x^6 + \binom{10}{7}x^7 + \binom{10}{8}x^8 + \binom{10}{9}x^9 + \binom{10}{10}x^{10}$$

afgekort:

$$(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^k$$

e. Controleer of de eerste en de laatste term van deze som juist zijn.

Manier2: met differentiëren

37 Bekijk $(1+x)^{10} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7 + a_8 \cdot x^8 + a_9 \cdot x^9 + a_{10} \cdot x^{10}$.
We gaan linker- en rechterlid vier keer differentiëren.
De vierde afgeleide van het linkerlid is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (1+x)^6$
a. Schrijf de vierde afgeleide van het rechterlid op.

Nu vullen we voor x in beide vierde afgeleides 0 in en vereenvoudigen de uitkomsten.
b. Wat zijn die uitkomsten?

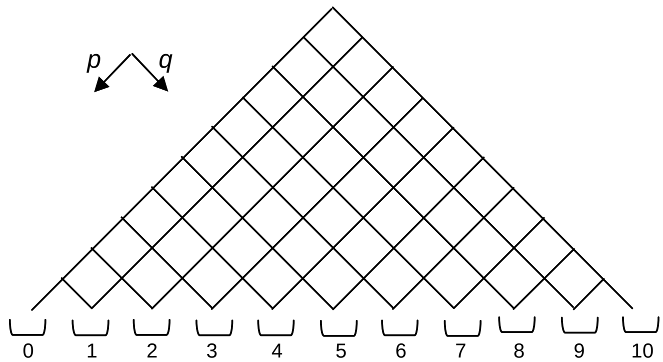
c. Ga na dat uit het voorgaande volgt dat $a_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

d. Ga na dat $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{10}{4}$

We hebben hetzelfde resultaat gevonden als in opgave 37.

Manier3: met kansrekening

38 We bekijken het asymmetrische Galtonbord het 10 rijen. Voor een kogeltje is de kans om naar links te vallen p en de kans om naar rechts te vallen $q = 1-p$.
We nummeren de bakjes van links naar rechts: 0, 1, 2, …, 10.



a. Wat is de kans dat een kogeltje in bakje met nummer k terecht komt?

b. Leg uit: $1 = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$

Als je beide leden van de formule in onderdeel b vermenigvuldigt met a^{10}, krijg je $a^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (ap)^k (aq)^{10-k}$.

c. Leg dat uit.

Vervang ap door x en aq door y. Dan krijg je :
$(x+y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k y^{10-k}$.

d. Leg dat uit.

Voor alle getallen x en y en alle gehele exponenten n geldt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

Deze formule staat bekend als het **binomium van Newton.**

$x+y$ is een tweeterm (binomus); vandaar de naam.

39 **a.** Ga na dat het binomium van Newton en het resultaat van opgave 38 met elkaar in overeenstemming zijn.
b. Ga na dat de uitkomsten van opgave 38a speciale gevallen zijn van het binomium van Newton.

40 **a.** Bewijs uit het binomium van Newton dat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

b. Welke uitkomst levert het binomium van Newton voor $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}$?

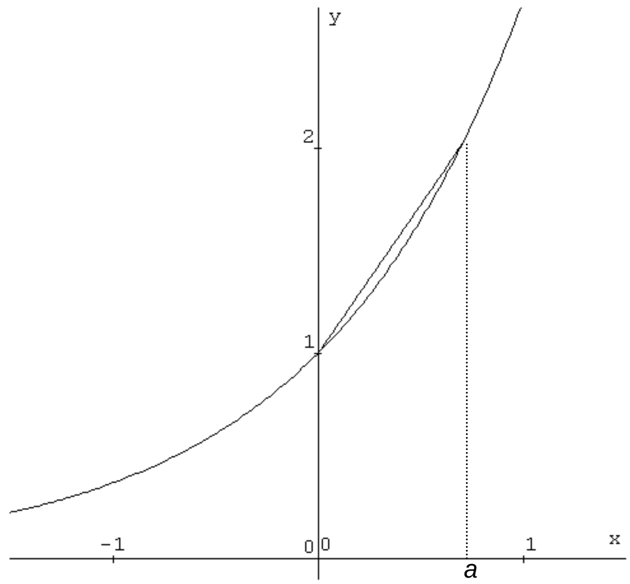
C De e-macht als limiet

41 We gaan het getal e benaderen.

Ons uitgangspunt is: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Bijgevolg is $e^a \approx 1 + a$. En dit klopt beter naarmate a dichter bij 0 ligt.

a. Leg dat uit, bijvoorbeeld aan de hand van de figuur hieronder*.*



Kies a = $\frac{x}{n}$. Dan krijg je $e^{\frac{x}{n}} \approx 1 + \frac{x}{n}$. Dit klopt des te beter als n groot is en x niet al te groot.

Hieruit volgt dat $e^x \approx (1 + \frac{x}{n})^n$.

b. Leg dat uit.

Door in deze formule voor x de waarde 1 te kiezen en voor n een groot getal, kun je e benaderen.

c. Doe dat.

Voor alle getallen x geldt:

$$e^x \approx (1 + \tfrac{x}{n})^n$$

en dit klopt beter naarmate n groter is.

D De verwachtingswaarde van *T*

Uit opgave 28c volgt dat $P(t < T < t+\Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} 2 \cdot e^{-2x} dx$.

Hieruit volgt:
$P(t < T < t+\Delta t) \approx 2 \cdot e^{-2t} \cdot \Delta t$ voor kleine waarden van Δt
.

De verwachtingswaarde van een discrete stochast X (die de waarden 0, 1, 2, 3, … aanneemt bereken je als volgt:
vermenigvuldig de waarden die hij kan aannemen met de bijbehorende kansen en tel de producten op:
0 × P(X=0) + 1 × P(X=1) + 2 × P(X=2) +3 × P(X=3) + …

Dat doen we nu ook bij de continue stochast T:
tel de producten $t \times P(t < T < t+\Delta t)$ op.
Laat vervolgens Δt tot 0 naderen en je krijgt als verwachtings waarde:

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot 2 \cdot e^{-2x} dt .$$

5 Antwoorden

Paragraaf 1 Wachten

1 **a.** $\frac{11}{12}$
b. $\frac{11}{12}$
c. $(\frac{11}{12})^{10} \approx 0{,}4189$

2 **a.** $(\frac{23}{24})^{20} \approx 0{,}4269$
b. Die verschillen (een beetje).

3 **a.** binompdf(10, $\frac{1}{12}$**,** 1) = 0,3808 of $10 \cdot \frac{1}{12} \cdot (\frac{11}{12})^9$
b. binompdf(10, $\frac{1}{12}$**,** 2) = 0,1558 of $45 \cdot (\frac{1}{12})^2 \cdot (\frac{11}{12})^8$

4 **a.** 0, 1, 2, …, 10
b. $(\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{3}{4})^7 \approx 0{,}0021$
c. $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$
d. $\binom{10}{3} \cdot (\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{3}{4})^7 \approx 120 \cdot 0{,}0021 \approx 0{,}250$

5 **a.** Het aantal klasgenoten van Jan dat in dezelfde week jarig is, is binomiaal verdeeld met $p = \frac{1}{52}$ en $n = 24$.

De gevraagde kans is $\binom{24}{2} \cdot (\frac{1}{52})^2 \cdot (\frac{51}{52})^{22} \approx 0{,}0666$

b. binompdf(24,1/52,2)

7 **a.** $P(X{=}k) = \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{2})^n$

b. Kies $k = 0$. Dan is $P(X{=}0) = 1$. En $\binom{n}{k} \cdot (0)^k \cdot (1)^{n-k} = 0$ voor alle $k = 1, 2, …, n$. Dus moet $\binom{n}{0} \cdot (0)^0 \cdot (1)^n = 1$. Dus moet $0^0 = 1$.

8 **a.** $(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b. Kies a = 1 en b = 1.

c. $\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot (1-a)^n + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot (1-a)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot (1-a)^0$ is dan gelijk aan 1.
Vat a op als de kans op succes. Dan zegt de formule dat de som van de kansen op 0, 1, 2, …, n successen 1 is.

Paragraaf 2 De Poissonverdeling

10 a. Daar moet hij het personeel op aanpassen. Klanten die moeten wachten verliest hij anders.
b. ??

11 a. Ze hebben niet afgesproken samen naar de winkel te gaan. Als een klant binnenkomt is dat van geen invloed op de aankomsttijd van een andere klant.
b. $\binom{10}{8} \cdot (\frac{1}{2})^8 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 0{,}04395$ of binompdf(10,0,5,8)
c. Heel klein. Er is niet zo veel speling: Als een volgende klant precies komt als de vorige net weg is, is er maar 10 minuten in het uur over.

12 a. 0 klanten in het hele uur betekent dat er 0 klanten komen in het eerste halfuur en daarna ook 0 klanten in het tweede halfuur. De kansen op de twee laatstgenoemde gebeurtenissen zijn gelijk; die moet je vermenigvuldigen.
b. $P_1(1) = P_{½}(0) \cdot P_{½}(1) + P_{½}(1) \cdot P_{½}(0) = 2 \cdot P_{½}(0) \cdot P_{½}(1)$
c. Stel je weet dat er in totaal 7 klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten in welk van de twee winkels ze binnen zullen gaan.
Stel je weet dat er in totaal 7 klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten in welk van de twee winkels ze binnen zullen gaan.
$P_1(3) = P_{½}(0) \cdot P_{½}(3) + P_{½}(1) \cdot P_{½}(2) + P_{½}(2) \cdot P_{½}(1) + P_{½}(3) \cdot P_{½}(0) = 2 \cdot P_{½}(0) \cdot P_{½}(3) + 2 \cdot P_{½}(1) \cdot P_{½}(2)$

13 a. $P_{½}(6) \cdot P_{½}(1) =$
P(6 klanten in het eerste halfuur en 1 in het tweede halfuur) =
P(7 klanten in het hele uur en daarvan 1 in het tweede halfuur) =
$P_1(7) \cdot P_1$(1 van de 7 klanten komt in het eerste halfuur) =
$P_1(7) \cdot 7 \cdot (½)^7$
b. $P_{½}(6) \cdot P_{½}(1) = 7 \cdot P_{½}(7) \cdot P_{½}(0)$
Deel beide leden door $7 \cdot P_{½}(0)$ geeft het gewenste resultaat.
c. $P_{½}(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_{1/2}(1)}{P_{1/2}(0)} \cdot P_{½}(n-1)$
d. Voor $n = 1$ zegt de formule: $P_{½}(1) = \frac{P_{1/2}(1)}{P_{1/2}(0)} \cdot P_{½}(0)$.

14 **a.** $P_{½}(1) = \lambda \cdot P_{½}(0)$

$P_{½}(2) = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot P_{½}(0)$

$P_{½}(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 \cdot P_{½}(0)$

$P_{½}(4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda^4 \cdot P_{½}(0)$

$P_{½}(5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda^5 \cdot P_{½}(0)$

b. $P_{½}(n) = \frac{1}{n!} \cdot \lambda^n \cdot P_{½}(0)$

15 **a.** $0{,}1 \cdot e^{\lambda} = 1$, dus $\lambda = \ln(10) \approx 2{,}3026$

b. $P_{1/2}(0) \cdot e^{\lambda} = 1$, dus $e^{\lambda} = 1/P_1(0)$, dus $\lambda = \ln(1/P_1(0))$.

16 **a.** $E(X) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} + \ldots$

Haal $e^{-\lambda}$ buiten haakjes en haal één factor λ buiten haakjes.

b. Tussen de haakjes staat e^{λ}. Omdat $e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$, is $E(X) = \lambda$.

17 **a.** $P(X=0) = e^{-\lambda}$ en $P(Y=0) = e^{-\frac{1}{2}\lambda}$.

Inderdaad is $e^{-\lambda} = (e^{-\frac{1}{2}\lambda})^2$

b. $P(X=1) = \lambda \cdot e^{-\lambda}$, $P(Y=0) = e^{-\frac{1}{2}\lambda}$ en $P(Y=1) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda}$

Inderdaad is $\lambda \cdot e^{-\lambda} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{1}{2}\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda}$

18 **a.** Er zijn gemiddeld 123 / 365 brandmeldingen per dag.

X is Poissonverdeeld met $\lambda = \frac{123}{365}$.

$P(X=2) = (\frac{123}{365})^2 / 2! \cdot e^{\frac{123}{365}} \approx 0{,}04054$

b. Er vallen gemiddeld 810/365 fietsdoden per dag.

X s Poissonverdeeld met $\lambda = \frac{810}{365}$.

$P(X=2) = (\frac{810}{365})^3 / 3! \cdot e^{\frac{810}{365}} \approx 0{,}1980$

20 **a.** *X* en *Y* nemen positieve gehele waarden aan en nul. Als $X+Y = 10$, is $X=0$ en $Y=10$ of $X=1$ en $Y=9$ of … $X=10$ en $Y=0$. Omdat *X* en *Y* onafhankelijk zijn, volgt het beweerde.

b. $e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{10}}{10!} e^{-\mu} + \lambda e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^9}{9!} e^{-\mu} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^8}{8!} e^{-\mu} + \ldots +$

$\frac{\lambda^{10}}{10!}\, e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} =$

$e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} \left(\frac{\mu^{10}}{10!} + \lambda \cdot \frac{\mu^{9}}{9!} + \frac{\lambda^{2}}{2!} \cdot \frac{\mu^{8}}{8!} + \ldots + \frac{\lambda^{10}}{10!}\right) =$

$e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{10!} \cdot \left(\binom{10}{0}\lambda^0\mu^{10} + \binom{10}{1}\lambda^1\mu^9 + \binom{10}{2}\lambda^2\mu^8 + \ldots \binom{10}{10}\lambda^{10}\mu^0\right)$

$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{10!} \cdot (\lambda+\mu)^{10}$;

de laatste stap volgens het binomium van Newton.

c. In de laatste uitdrukking herken je (hopelijk) de kans op waarde 10 van een Poissonverdeelde stochast met parameter $\lambda+\mu$.

21 a. Elke klant gaat met 2 keer zo grote kans naar de tweede winkel dan naar de eerste. De kans dat hij dus naar de eerste winkel gaat is

b. De drie kansen zijn:

$\frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} = 3e^{-3}$, $\frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = e^{-1}$ en $\frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = e^{-2}$.

c. $3\, e^{-3} \cdot$ P(die ene klant gaat naar de 1ste winkel) = $e^{-1} \cdot e^{-2}$.
Links en rechts vallen de e-machten tegen elkaar weg.
Dus P(die ene klant gaat naar de 1ste winkel) = 1/3.

d. $\binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}2561$

22 a. 8
b. 0,122138
c. 0,122138

d. $\binom{800000}{6} = \frac{800000 \cdot 799999 \cdot 799998 \cdot 799997 \cdot 799996 \cdot 799995}{6!}$ en

799999, 799998, 799997, 799996, 799995 zijn nagenoeg gelijk aan 800000. Vervolgens is $800000^6 \cdot 0{,}00001^6 = (800000 \cdot 0{,}00001)^6 = 8^6$.

e. $0{,}99999^{799994} \cdot 0{,}99999^6 = 0{,}99999^{800000}$ en $0{,}99999^6 = 0{,}99994\ldots \approx 1$

f. $0{,}99999 = 1 - 0{,}00001 = 1 - \frac{8}{800000}$.

g. Het resultaat van d geeft:

$P(X=6) \approx \frac{8^6}{6!} \cdot \left(1 - \frac{8}{800000}\right)^{800000}$ en dit is precies de Poissonkans op uitkomst 6 bij parameter 8.

23 Het aantal dragers is bij benadering Poissonverdeeld met $\lambda = 170$.
poissoncdf(170,185) = 0,8818

24 X = aantal doden in een regiment in een jaar.
$P(X=0) = e^{-0{,}7} = 0{,}4966$
$P(X=1) = 0{,}7 \cdot e^{-0{,}7} = 0{,}3476$
$P(X=2) = 0{,}7^2 / 2! \cdot e^{-0{,}7} = 0{,}1217$

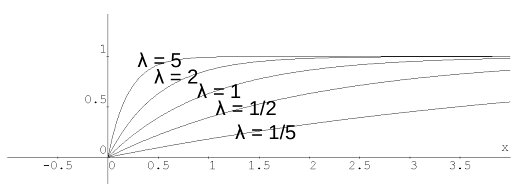
6 4 45
6

Paragraaf 3 Wanneer komt de volgende klant

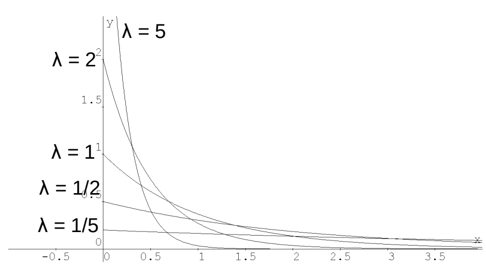
26 a. Het aantal klanten in de eerste 1½ uur is Poisson-verdeeld met $\lambda = 1\frac{1}{2} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$.
$P(\frac{1}{2} < T < 1\frac{1}{2}) = P(T > \frac{1}{2}) - P(T \geq 1\frac{1}{2}) = e^{-1,5} - e^{-4,5} =$
$0,2231 - 0,0111 = 0,2120$
b. P(2 klanten in eerste halfuur) · P(2 klanten in derde kwartier) = $\frac{(1,5)^2}{2!} e^{-1,5} \cdot \frac{(0,75)^2}{2!} e^{-0,75} = 0,2510 \cdot 0,1329 =$ $0,0333$.

27 a. Alle getallen groter dan 0
b. X is discreet verdeeld, T is continu verdeeld
c. Het aantal klanten in de eerste t uur is Poisson-verdeeld met parameter $t \cdot \lambda$.
$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 -$ P(0 klanten in de eerste t uur) $= 1 - \frac{(t \cdot \lambda)^0}{0!} e^{-t \cdot \lambda} = 1 - e^{-t \cdot \lambda}$.
d. Als $t = 0$, levert de formule $1 - e^0 = 0$ en dat moet ook: de kans dat de eerste klant onmiddellijk komt is 0.
Als t nadert tot oneindig, levert de formule $1 - 0 = 1$ en dat moet ook: de kans dat er ooit een klant zal komen is 1.

29 a.



b.



c. $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$.

$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx + c$ zijn de primitieven van f.

$F(0) = 0$ en $\int_0^0 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0$. Dus $c = 0$.

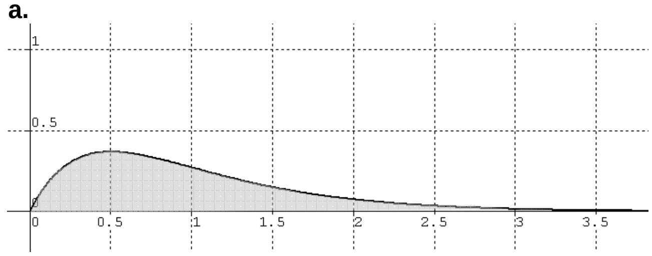
29 **a.** T is de wachttijd in minuten.
$P(T \leq 30)$ $1 - e^{-\lambda \cdot 30} = 0{,}5$. Hieruit volgt dat $\lambda = 0{,}0231$.
$P(T \leq 5) = 1 - e^{-0{,}0231 \cdot 5} = 0{,}1091$
b. $P(T > 60) = e^{-0{,}0231 \cdot 60} = 0{,}2501$

30 Studys gedachte is fout. De situatie na de eerste 40 minuten is precies dezelfde als toen ze begon te liften. De kans op een lift is dus niet beïnvloed door wat er vooraf gebeurd is.

31 **a.** Gewoon $\frac{1}{6}$. De voorgeschiedenis van de dobbelsteen heeft geen invloed op de kans op een 6.
b. Nee.

32 $P(X > a) = e^{-\lambda a}$, $P(X > b) = e^{-\lambda b}$ en $P(X > a+b) = e^{-\lambda(a+b)}$
Inderdaad geldt: $e^{-\lambda a} \cdot e^{-\lambda b} = e^{-\lambda(a+b)}$.

33 **a.**



Hokjes tellen: de oppervlakte is ongeveer 2 hokjes van oppervlakte 0,25. Dus is de oppervlakte ongeveer ½ .

b. $y' = -e^{-2x} + -x \cdot -2\, e^{-2x} - ½ \cdot -2\, e^{-2x} = 2x\, e^{-2x}$
c. Als we in de primitieve 0 invullen krijgen we – ½ . Als we een heel groot getal invullen, krijgen we 0.
Dus $E(T) = 0 - -½ = ½$.
d. $1/\lambda$

Paragraaf 4 Appendix

35 **a.** $y_5'(x) = 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24$
b. Als $|x| < 1$, dan $|x|^5 < 1$ en $|x^5 /120| < 1/120 < 0{,}01$
c. $\underline{y_{50}'(x) =} 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + x^4 / 24 + \ldots + x^{49} / 49!$
d. Als $|x| < 17$, dan $|x|^{50} < 17^{50}$ en $|x^{50} /50!| \approx 0{,}001095 < 0{,}0111$
e. $x^n / n!$
f. $y(0) = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1 = c \cdot e^0$. Dus $c = 1$.

36 **a.** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
b. $a_0 = a_7 = 1$
c. 1

$$
\begin{array}{l}
1 + 1\,x \\
1 + 2\,x + 1\,x^2 \\
1 + 3\,x + 3\,x^2 + 1\,x^3 \\
1 + 4\,x + 6\,x^2 + 4\,x^3 + 1\,x^4 \\
1 + 5\,x + 10x^2 + 10x^3 + 5\,x^4 + 1\,x^5 \\
1 + 6\,x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6\,x^5 + 1\,x^6 \\
1 + 7\,x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + 1\,x^7
\end{array}
$$

d. 120
e. De eerste term is $\binom{10}{0} = 1$ en dat klopt.

De laatste term is $\binom{10}{10} = 1$ en dat klopt.

37 **a.** $4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1\, a_4 + 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2\, a_5\, x + 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3\, a_6\, x^2 + 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4\, a_7\, x^3 + 8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5\, a_8\, x^4 + 9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6\, a_9\, x^5 + 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7\, a_{10}\, x^6$
b. links: $10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}1^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
rechts: $4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}a_4$
c. Kennelijk is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}a_4$
Delen door $4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$ geeft het resultaat.
d. Vermenigvuldig in $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ teller en noemer met

$6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$. Dan krijg je: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \bullet 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{4!\,6!} = \binom{10}{4}$

38 **a.** $\binom{10}{k} \cdot p^k \cdot q^{10-k}$

b. Rechts staat de kansen dat een kogeltje in een bakje komt over alle bakjes opgeteld. Het kogeltje komt zeker in een van de bakjes. Die totale kans is dus 1.

c. $a^{10} \cdot \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot q^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}\ a^{10} \cdot p^k \cdot q^{10-k} =$

$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot a^k p^k \cdot a^{10-k} q^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (ap)^k \cdot (aq)^{10-k}$.

d. Het rechterlid is duidelijk. Links komt er te staan: Omdat $p+q = 1$, is $x+y = ap + aq = a(p+q) = a$ en daarmee is het linkerlid verklaard.

39 **a.** Kies in het binomium van Newton y =1 en het resultaat van opgave komt er te staan.

b. Kies n=2: $(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Kies n=3: $(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} xy^2 + \binom{3}{3} y^3 =$

$x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$

Kies n=4: $(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^2 y^2 + \binom{4}{4} y^4$

$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$

40 **a.** Kies $x = y = 1$ en de formule komt er te staan.

b. Kies $x = -1$ en $y = 1$. Dan levert het binomium van Newton dat de gevraagde som gelijk is aan $(1+-1)^n = 0$.

41 **a.** De afgeleide van e^x voor x=0 is 1. Dus de raaklijn aan de grafiek heeft vergelijking $y = x+1$. Dicht bij 0 zijn $y=e^x$ en $y=x+1$ ongeveer gelijk. Dus $e^a \approx a + 1$ als a dicht bij 0 ligt.

b. Neem van beide leden van $e^{\frac{x}{n}} \approx 1 + \frac{x}{n}$ de n-de macht.

c. Kies bijvoorbeeld $n = 1000$ en $x = 1$. Dan geeft de formule: $e \approx 1{,}001^{1000}$ en dat is ongeveer 2,7169.
Kies bijvoorbeeld $n = 1000$ en $x = -1$. Dan geeft de formule: $e \approx 1 / 0{,}999^{1000}$ en dat is ongeveer 2,7196.
e ligt tussen deze twee waarden in.