# Niet-euclidische meetkunde

## Les 1
## Wat is euclidische meetkunde?

(Deze les sluit aan bij hoofdstuk 1 van de tekst
Niet-Euclidische meetkunde van de Wageningse Methode)

# Euclides

- Leefde 300 jaar voor Christus.
- Schreef: **De Elementen.**
- De eerste systematische opbouw van de meetkunde.
- De originele tekst is verloren gegaan.
- Via de islamitische cultuur tot ons gekomen.
- Eerste druk in 1482 (in het latijn).


*Euclides van Alexandrië*

rijksuniversiteit groningen

# De Elementen

- Ga uit van een **aantal basisbegrippen**
  - Definities (23)
  - Algemene inzichten (5)
  - Postulaten (5)
- Proposities: wiskundige beweringen
  die bewezen worden vanuit de basisbegrippen
  met de strikte wetten van de logica.

- Gebruik deze basisbegrippen en geen andere.

- Wat al bewezen is, mag je weer gebruiken.

*De elementen van Euclides*

# De Elementen

**Resultaat:**

- Meetkundige figuren die je alleen met '**passer en liniaal**' kunt tekenen.
- Een liniaal zonder maatstrepen.
- Geen gradenboog of tekendriehoek zodat je lengtes en hoeken zou kunnen meten.

# De Elementen


Lees de de tekst tot en met opdracht 2.

# Definities

Hier wordt vastgelegd over welke objecten het gaat en
wat de basiskenmerken zijn van deze objecten:

1. Een punt is een niet deelbaar object.
2. Een lijn(stuk) heeft geen breedte.
3. Een lijnstuk heeft punten als uiteinde.
4. Een rechte lijn is een lijn die gelijk is met de punten erop.
5. ……..


Lees de Definities in Bijlage 1 en maak een lijst van alle
meetkundige figuren die hier worden vastgelegd.

# Wat is een lijn?

Volgens Euclides:
Definitie 4. *Een rechte lijn is een lijn die gelijk is met de punten erop.*

Dit is een geheimzinnige omschrijving die tot veel discussie heeft geleid.

Volgens Proclus (412 – 485 na Christus) betekent dit dat op een lijn de afstand tussen twee willekeurige punten gelijk is aan de lengte van het lijnstuk tussen die punten.


Laat zien dat met deze interpretatie een cirkel geen lijn is.

# Algemene inzichten

Dit zijn regels die je kunt gebruiken bij het bewijzen.

Samen vormen ze een soort van ‘meetkundige bewijslogica’.

Ze zijn de regels van het ‘bewijs-spel’.


Maak opdracht 3 op bladzijde 3.

# Algemene inzichten

## Uitwerking opdracht 3 (in onze algebra-taal)

1 *Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk*.

Als $a = c$ en $b = c$ dan is $a = b$.

# Algemene inzichten

Uitwerking opdracht 3 (in onze algebra-taal)

1 *Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk*.

Als $a = c$ en $b = c$ dan is $a = b$.

2 *Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a + c = b + c$

# Algemene inzichten

Uitwerking opdracht 3 (in onze algebra-taal)

1 *Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk*.

Als $a = c$ en $b = c$ dan is $a = b$.

2 *Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a + c = b + c$

3 *Als men van gelijke dingen gelijke afneemt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a - c = b - c$

# Algemene inzichten

Uitwerking opdracht 3 (in onze algebra-taal)

1 *Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk*.

Als $a = c$ en $b = c$ dan is $a = b$.

2 *Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a + c = b + c$

3 *Als men van gelijke dingen gelijke afneemt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a – c = b – c$

4 *Dingen die op elkaar passen zijn gelijk.*

Hier kun je geen algebraïsche formulering bij geven.
Deze regel gebruik je om de congruentie van figuren aan te tonen door ze op elkaar te leggen.

rijksuniversiteit groningen

# Algemene inzichten

## Uitwerking opdracht 3 (in onze algebra-taal)

1 *Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk*.

Als $a = c$ en $b = c$ dan is $a = b$.

2 *Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a + c = b + c$

3 *Als men van gelijke dingen gelijke afneemt, dan zijn de totalen gelijk.*

Als $a = b$ dan is $a - c = b - c$

4 *Dingen die op elkaar passen zijn gelijk.*

Hier kun je geen algebraïsche formulering bij geven.
Deze regel gebruik je om de congruentie van figuren aan te tonen door ze op elkaar te leggen.

5 *Het geheel is groter dan het deel.*

$a + b > a$

# Postulaten

Dit zijn grondwaarheden, waar niemand aan twijfelt en die je bij het bewijzen als basis kunt gebruiken.

Je kunt:

1 van elk punt naar elk (ander) punt precies één rechte lijn (lijnstuk) trekken; dus een liniaal gebruiken,

# Postulaten

Dit zijn grondwaarheden, waar niemand aan twijfelt en die je bij het bewijzen als basis kunt gebruiken.

Je kunt:

1 van elk punt naar elk (ander) punt precies één rechte lijn (lijnstuk) trekken; dus een liniaal gebruiken,

2 een lijnstuk verlengen tot een lijn; met een liniaal,

# Postulaten

Dit zijn grondwaarheden, waar niemand aan twijfelt en die je bij het bewijzen als basis kunt gebruiken.

Je kunt:

1 van elk punt naar elk (ander) punt precies één rechte lijn (lijnstuk) trekken; dus een liniaal gebruiken,

2 een lijnstuk verlengen tot een lijn; met een liniaal,

3 je kunt met elk punt en elk lijnstuk een cirkel tekenen met het punt als middelpunt en het lijnstuk als straal; je kunt een passer gebruiken,

# Postulaten

Dit zijn grondwaarheden, waar niemand aan twijfelt en die je bij het bewijzen als basis kunt gebruiken.

Je kunt:

1 van elk punt naar elk (ander) punt precies één rechte lijn (lijnstuk) trekken; dus een liniaal gebruiken,

2 een lijnstuk verlengen tot een lijn; met een liniaal,

3 je kunt met elk punt en elk lijnstuk een cirkel tekenen met het punt als middelpunt en het lijnstuk als straal; je kunt een passer gebruiken,

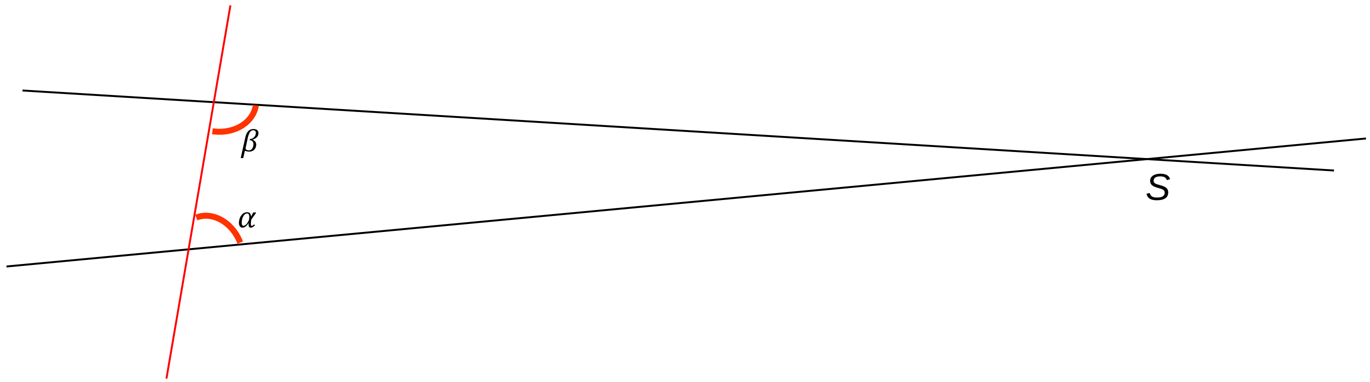
4 alle rechte hoeken zijn aan elkaar gelijk; (dit betekent niet dat je een rechte hoek kunt tekenen, je mag dus geen geodriehoek gebruiken, een rechte hoek moet je construeren, maar elke constructie leidt tot dezelfde rechte hoek).

# Het vijfde postulaat

5 Gegeven twee rechte lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt.
Gegeven is ook dat de binnenhoeken van deze derde lijn met de twee snijdende lijnen aan dezelfde kant samen kleiner zijn dan een gestrekte hoek.
Dan snijden de twee rechten elkaar aan dezelfde kant, tot in het oneindige verlengd.

# Het vijfde postulaat

5 Gegeven twee rechte lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt.
Gegeven is ook dat de binnenhoeken van deze derde lijn met de twee snijdende lijnen aan dezelfde kant, samen kleiner zijn dan een gestrekte hoek.
Dan snijden de twee rechten elkaar aan dezelfde kant, tot in het oneindige verlengd.




$$\angle\alpha + \angle\beta < 180°$$

# Proposities

Stellingen (beweringen) over meetkundige objecten en eigenschappen die je moet bewijzen.

**Propositie 1**

Op een gegeven lijnstuk kun je een gelijkzijdige driehoek construeren.

# Proposities

Stellingen (beweringen) over meetkundige objecten en eigenschappen die je moet bewijzen.

**Propositie 1**

Op een gegeven lijnstuk kun je een gelijkzijdige driehoek construeren.


- Lees de tekst boven opgave 4 op bladzijde 3.
- Maak opgave 4 met passer en liniaal of met Geogebra.

# Proposities

**Propositie 15 (Overstaande hoeken)**

Gegeven twee lijnen die elkaar snijden.
Dan zijn de overstaande hoeken aan elkaar gelijk (X-hoeken).

# Bewijzen van proposities

**Propositie 15 (Overstaande hoeken)**

Gegeven twee lijnen die elkaar snijden. Dan zijn de overstaande hoeken aan elkaar gelijk (X-hoeken)

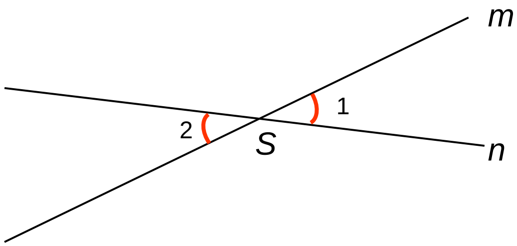
→ Maak een tekening en zet de gegevens in de tekening.

# Bewijzen van proposities

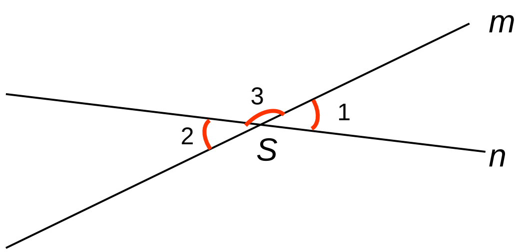
**Propositie 15 (Overstaande hoeken)**

Gegeven twee lijnen die elkaar snijden. Dan zijn de overstaande hoeken aan elkaar gelijk (X-hoeken)

→ Maak een tekening en zet de gegevens in de tekening.



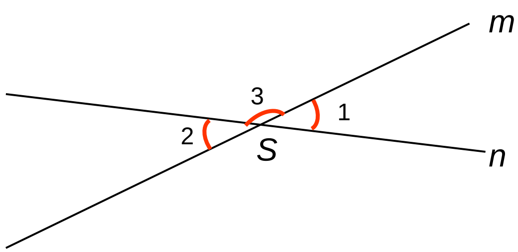
# Bewijzen van proposities




Gegeven: lijn *m* en lijn *n* snijden elkaar in *S*.

Te bewijzen: $\angle S_1 = \angle S_2$

# Bewijzen van proposities




Gegeven: lijn *m* en lijn *n* snijden elkaar in *S*.

Te bewijzen: $\angle S_1 = \angle S_2$

Bewijs: $\angle S_1 + \angle S_3$ is een gestrekte hoek (prop 13).
$\angle S_2 + \angle S_3$ is een gestrekte hoek (prop 13).
→ $\angle S_1 + \angle S_3 = \angle S_2 + \angle S_3$ (aanname 1)
→ $\angle S_1 + \angle S_3 - \angle S_3 = \angle S_2 + \angle S_3 - \angle S_3$ (aanname 3)

$$\angle S_1 = \angle S_2$$

# Bewijzen van proposities

**Propositie 16: De stelling van de buitenhoek**

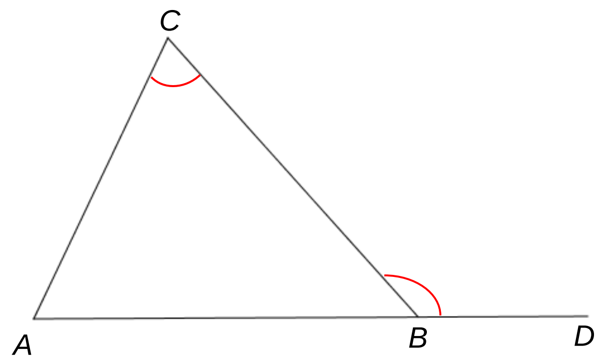
In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) groter dan elke niet aanliggende hoek.

rijksuniversiteit groningen

# Bewijzen van proposities

**Propositie 16: De stelling van de buitenhoek**

In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) groter dan elke niet aanliggende hoek.




$\angle CBD > \angle BCA$

# Bewijzen van proposities

**Propositie 16: De stelling van de buitenhoek**

In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) groter dan elke niet aanliggende hoek.

Bewijs (van Euclides)

*M* is het midden van *BC*.

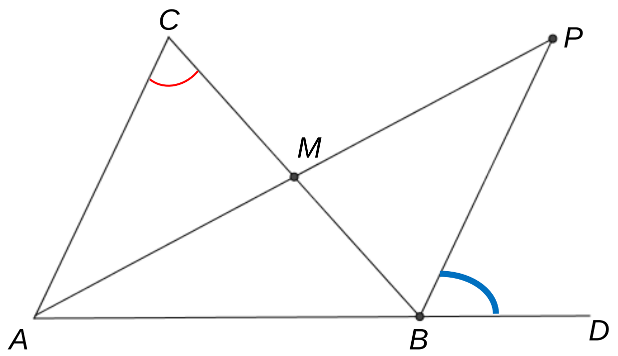
|*AM*| = |*MP*|

→ $\Delta AMC \cong \Delta BMP$

→ $\angle ACM = \angle PBM$

→ $\angle PBM < \angle PBM + \angle DBP$

→ $\angle C < \angle DBM$



# Bewijzen van proposities

**Propositie 16: De stelling van de buitenhoek**

In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) groter dan elke niet aanliggende hoek.

Bewijs (van Euclides)

*M* is het midden van *BC*.

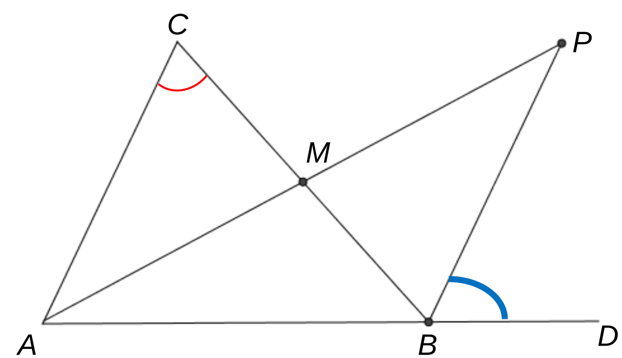
$|AM| = |MP|$

$\rightarrow \quad \Delta AMC \cong \Delta BMP$

$\rightarrow \quad \angle ACM = \angle PBM$

$\rightarrow \quad \angle PBM < \angle PBM + \angle DBP$

$\rightarrow \quad \angle C < \angle DBM$




Schrijf bij elke stap van welke aanname of welke propositie gebruik is gemaakt .

# Oefenen

Lezen: bladzijde 7

Maken: Opgaven 9 en 10.

# Huiswerk

Inleveren: Opgave 11.