Wiskunde D Online – uitwerkingen opgaven
6 VWO blok 16 Niet-euclidische meetkunde
Les 1

Opgave 1

a) Twee dimensionaal: 'Iets dat twee dimensies heeft, lengte en breedte' (wikipedia)
Figuur: 'Schematische afbeelding' (woorden.org)
Punt: 'Dimensiloos stuk ruimte' (wikipedia)
Afstand: 'Meetbare ruimte tussen niet samenvallende objecten' (wikipedia)

b) Bijvoorbeeld: lengte, breedte, afbeelding, ruimte, dimensieloos, meetbaar, object, samenvallen, ….

Opgave 2

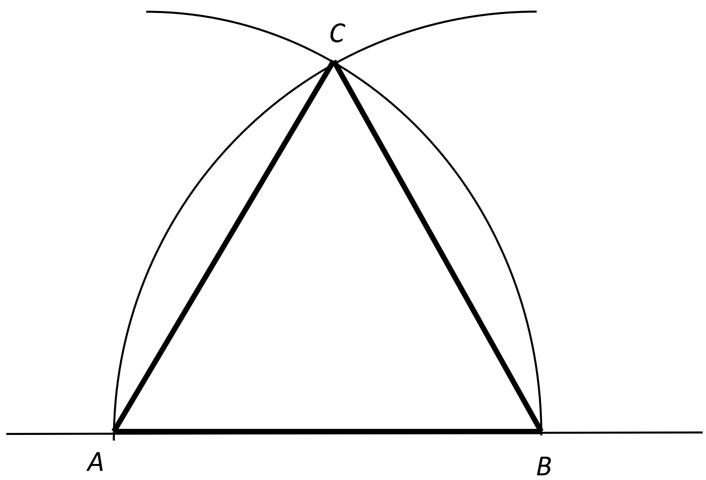
In de rechter kantlijn staan figuren, zoals een lijnstuk, punt, rechthoek, etc. Daarvan komen vast beschrijvingen aan de orde in de tekst.

Opgave 3

- Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, zijn de totalen gelijk: als $a = b$, dan is $a + c = b + c$.
- Als men van gelijke dingen gelijke afneemt, zijn de resten gelijk: als $a = b$, dan is $a - c = b - c$.
- Dingen die op elkaar passen zijn gelijk. Voor driehoeken zou dat als volgt geformuleerd kunnen worden: gegeven twee driehoeken ABC en PQR; als $AB = PQ$ en $BC = QR$ en $AC = PR$, dan driehoek ABC = driehoek PQR.
  Soortgelijke formuleringen kunnen ook gemaakt worden voor andere objecten.
- Het geheel is groter dan het deel: als $a > 0$ en $b > 0$ en $a + b = c$, dan is $c > a$ en $c > b$.

Opgave 4

a) Teken eerst een lijn, met daarop een lijnstuk AB.
Teken vervolgens een (deel van een) cirkel met middelpunt A en straal AB.
Teken daarna een (deel van een) cirkel met middelpunt B en straal AB.
De twee cirkels snijden elkaar in punt C.
Teken nu de lijnstukken AC en BC.
Daarmee is de gelijkzijdige driehoek geconstrueerd.



b) Aanname dat twee verschillende cirkels met middelpunten *A* en *B* en beide straal *AB* een snijpunt hebben.

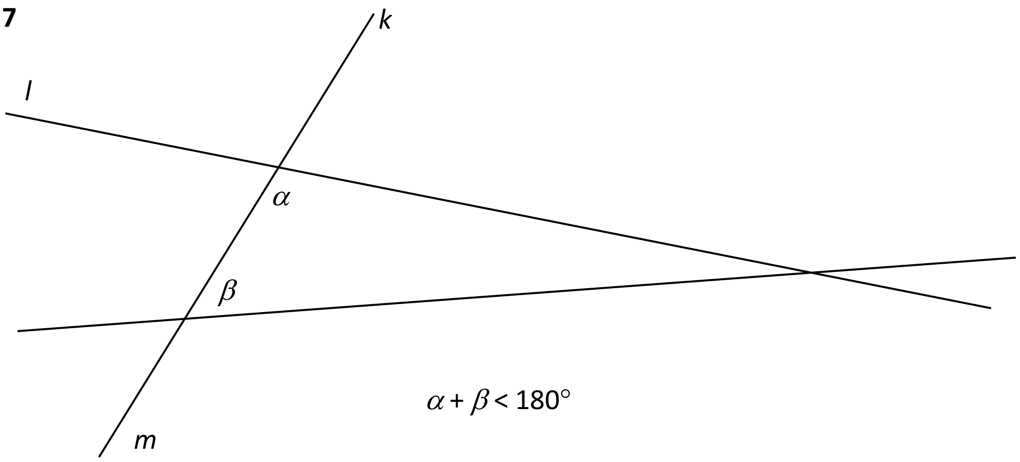
Opgave 5

a) Als het kevertje de ribben van de kubus blijft volgen, dan is de afstand 3 × 10 = 30 cm.
Maar het kan korter, bijvoorbeeld door van *E* naar *F* te gaan (10 cm) en dan van *F* schuin over het vlak rechtstreeks naar *C* (10 × √2 = 14,12 cm); in totaal 24,12 cm.
En het kan nog korter: van *E* rechtstreeks over het vlak naar een punt *M* midden op *AD*, en dan direct door naar *C*. De afstand *EM* = 10 × ½ × √5, dus EM + MC =10√5 = 22,36 cm.
b) Dwars door de kubus via een lijnstuk van *E* naar *C* heeft lengte 10√3 = 17,32 (twee keer stellling van Pythagoras toepassen).

Opgave 6

a) Na 1 seconde heeft Achilles de 5 meter ingehaald, maar dan is de schildpad alweer 0,5 meter verder.
b) De 0,5 meter heeft Achilles ma 0,1 seconde ingehaald, en dan is de schildpad weer 0,05 meter verder.
c) De 0,05 meter heeft Achilles ma 0,01 seconde ingehaald, en dan is de schildpad weer 0,005 meter verder.
d) De tijd die Achilles gebruikt is:
$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$
e) De reeks in onderdeel d is een meetkundige reeks met reden $r = \frac{1}{10}$ en startwaarde *a* = 1.
Hiervoor geldt:
$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

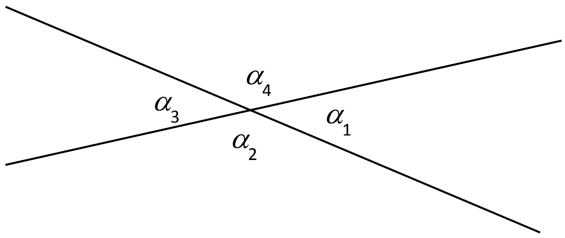
Opgave 7



Wiskunde D Online – uitwerkingen opgaven
6 VWO blok 16 Niet-euclidische meetkunde
Les 1

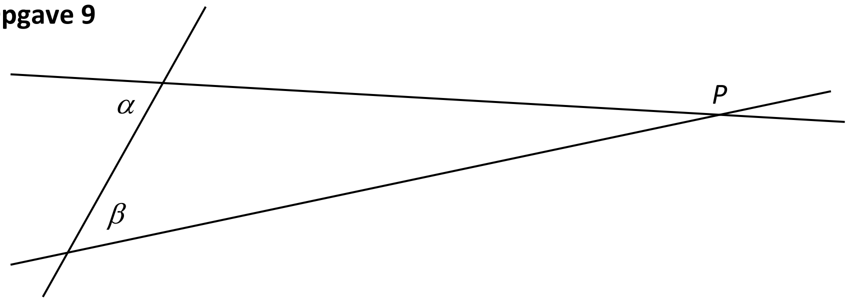
Opgave 8

Gegeven: Twee lijnen die elkaar kruisen.



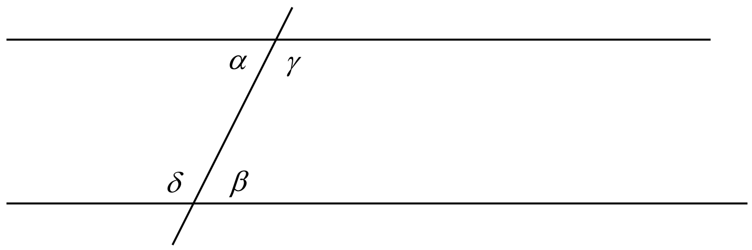
Te bewijzen: Overstaande hoeken zijn aan elkaar gelijk.
Bewijs:
We gaan bewijzen dat α_1 en α_3 aan elkaar gelijk zijn. Op gelijke wijze kan daarna bewezen worden dat at α_2 en α_4 aan elkaar gelijk zijn.
Uit propositie 13 volgt: $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. En evenzo volgt uit propositie 13: $\alpha_3 + \alpha_2 = 180°$.
Er geldt dus met het algemene inzicht 1 dat: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2$.
Met het algemene inzicht 3 halen we nu van beide sommen α_2 af, waarna het resultaat gelijk blijft:
$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_2 \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_3$. Qed.

Opgave 9



a) Er is gegeven dat $\alpha = \beta$.
   Maar stel nu dat de twee lijnen elkaar snijden in *P*, dan is er sprake van een driehoek.
   Volgens proposities 16 is een buitenhoek groter dan ieder van de niet-aanliggende binnenhoeken, dus dan gelt $\alpha > \beta$.
   Maar dat is in tegenspraak met het gegeven, dus dat kan niet.

b) In onderdeel a hebben we bewezen dat er geen snijpunt aan de rechterkant kan zijn. Als de hoeken α en β gelijk zijn, dan zijn ook de hoeken γ en δ gelijk.



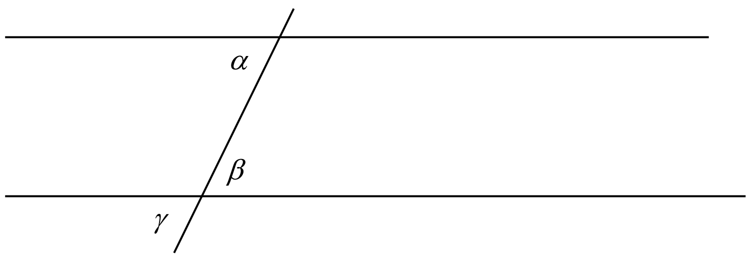
Immers: $\delta = 180° - \beta$ en $\gamma = 180° - \alpha$ en als je van 180° gelijke delen afhaalt ($\alpha = \beta$), dan resteren gelijke delen (algemeen inzicht 3).
We kunnen u op soortgelijke wijze al in onderdeel a bewijzen dat er links geen snijpunt is van de lijnen. De lijnen hebben dus nergens een snijpunt en zijn dus evenwijdig (definitie 23).

Opgave 10

a) We gaan uit van $\angle AEF > \angle DFE$. Bij beide hoeken tellen we $\angle FEB$ op:
$\angle AEF + \angle FEB > \angle DFE + \angle FEB$
Ofwel:
$180° > \angle DFE + \angle FEB$
Nu volgt direct uit postulaat 5 dat er een snijpunt is.

b) Als we er vanuit moeten gaan dat er geen snijpunt is, dan volgt uit onderdeel a dat niet geldt: $\angle AEF > \angle DFE$. Maar er mag ook niet gelden dat $\angle AEF < \angle DFE$, want dan is er aan de andere kant een snijpunt. De enige mogelijkheid die overblijft is: $\angle AEF = \angle DFE$.

c) We nemen de volgende figuur:



Uit onderdeel a volgt: $\alpha = \beta$.
Uit propositie 15 volgt: $\beta = \gamma$.
Met algemeen inzicht 1 volgt dan: $\alpha = \gamma$. Qed.