rijksuniversiteit groningen

Niet-euclidische meetkunde

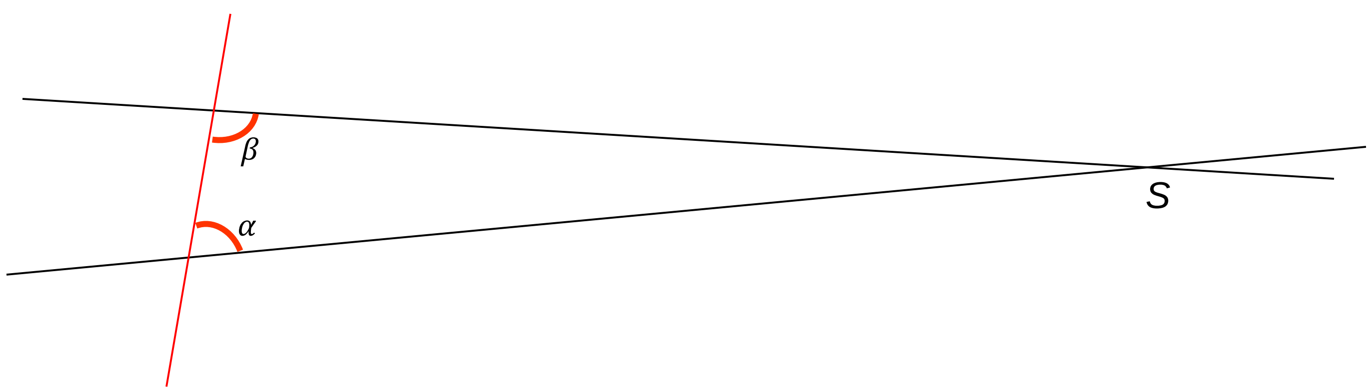
Les 2
Het parallellenpostulaat

(Deze les sluit aan bij paragraaf 1.3 van de tekst
Niet-Euclidische meetkunde van de Wageningse Methode)

rijksuniversiteit groningen

Het vijfde postulaat

5 Gegeven twee rechte lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt.
Gegeven is ook dat de binnenhoeken van deze derde lijn met de twee snijdende lijnen aan dezelfde kant, samen kleiner zijn dan een gestrekte hoek.
Dan snijden de twee rechten elkaar aan dezelfde kant, tot in het oneindige verlengd.

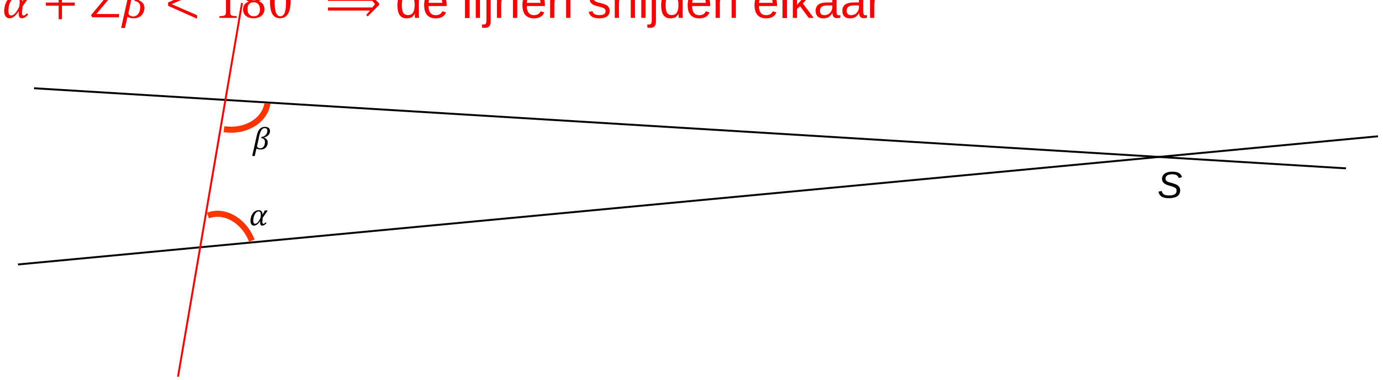


$$\angle\alpha + \angle\beta < 180°$$

Het vijfde postulaat

De logische structuur van het vijfde postulaat:

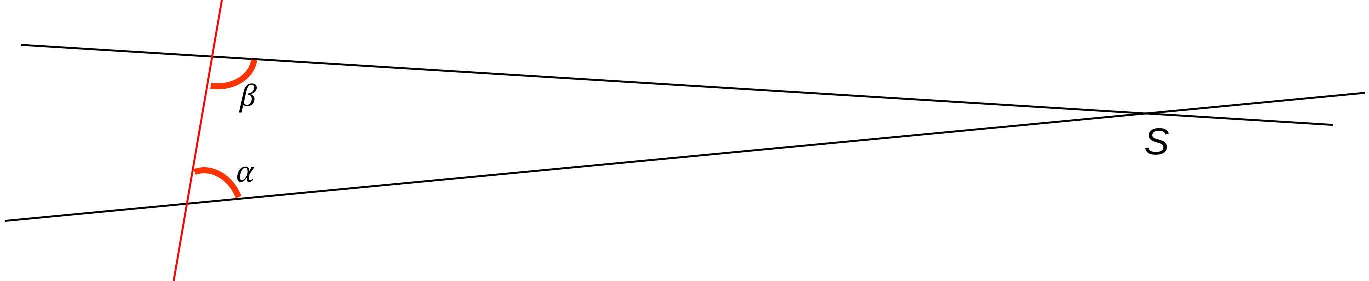
$\angle\alpha + \angle\beta < 180° \Longrightarrow$ de lijnen snijden elkaar



Het vijfde postulaat

De logische structuur van het vijfde postulaat:

$\angle\alpha + \angle\beta < 180° \Longrightarrow$ de lijnen snijden elkaar



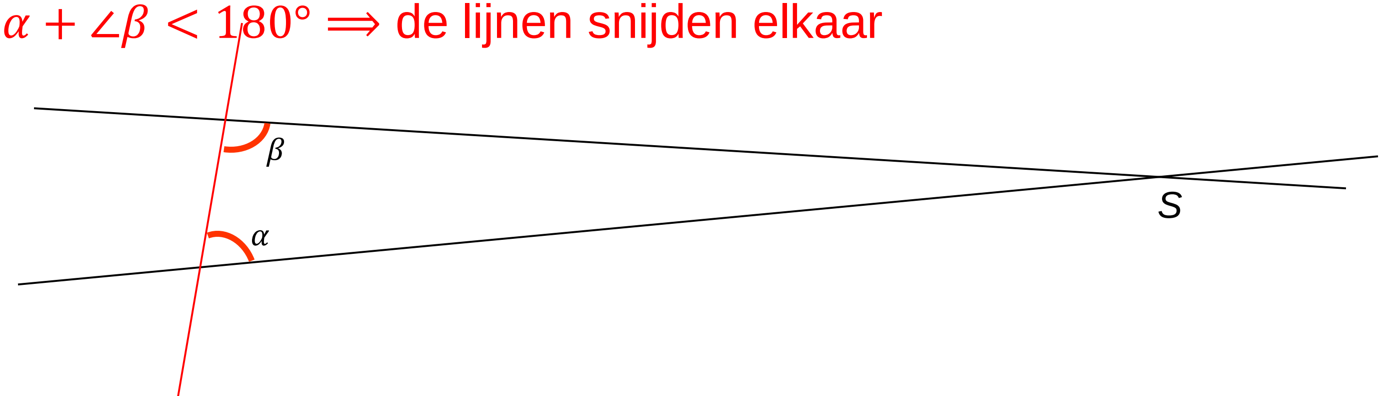
Volgens de logica is $P \Longrightarrow Q$ gelijkwaardig met $\neg Q \Longrightarrow \neg P$

In dit geval betekent dat:
de lijnen zijn evenwijdig $\Longrightarrow \angle\alpha + \angle\beta \geq 180°$

Het vijfde postulaat

De logische structuur van het vijfde postulaat:

$\angle\alpha + \angle\beta < 180° \Longrightarrow$ de lijnen snijden elkaar



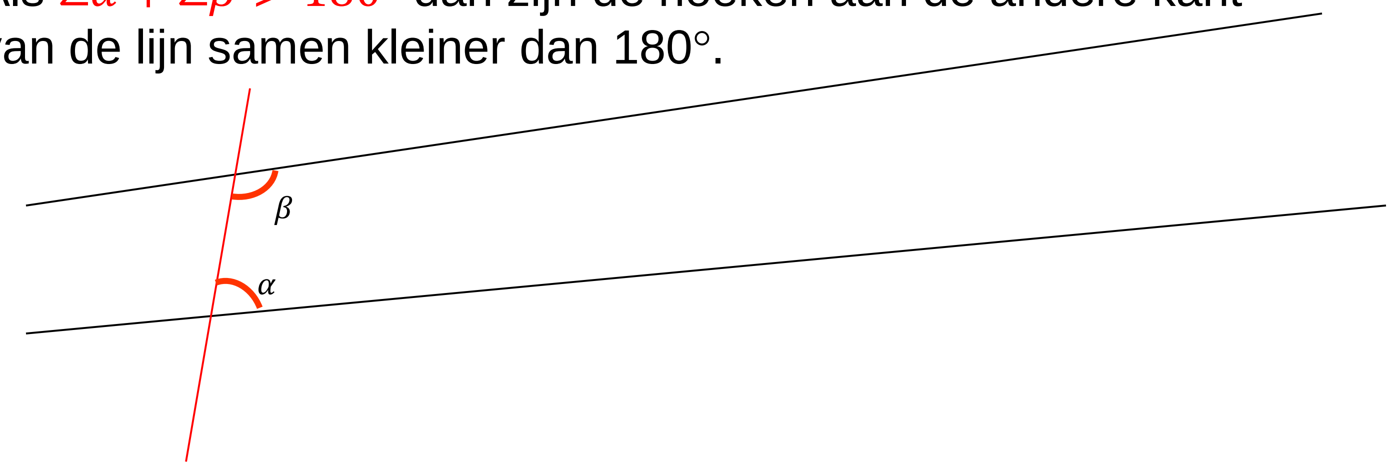
Volgens de logica is $P \Longrightarrow Q$ gelijkwaardig met $\neg Q \Longrightarrow \neg P$

Waarom is de volgende bewering onjuist:
de lijnen zijn evenwijdig $\Longrightarrow \angle\alpha + \angle\beta > 180°$

Het vijfde postulaat

Uitwerking

Als $\angle\alpha + \angle\beta > 180°$ dan zijn de hoeken aan de andere kant van de lijn samen kleiner dan 180°.



Aan deze kant zijn de hoeken samen kleiner dan 180°.
Volgens het vijfde postulaat snijden de lijnen aan de linkerkant.

Het vijfde postulaat

De bewering:

$\angle\alpha + \angle\beta < 180° \Longrightarrow$ de lijnen snijden elkaar

is dus volgens de logica gelijkwaardig met:

de lijnen zijn evenwijdig $\Longrightarrow \angle\alpha + \angle\beta = 180°$

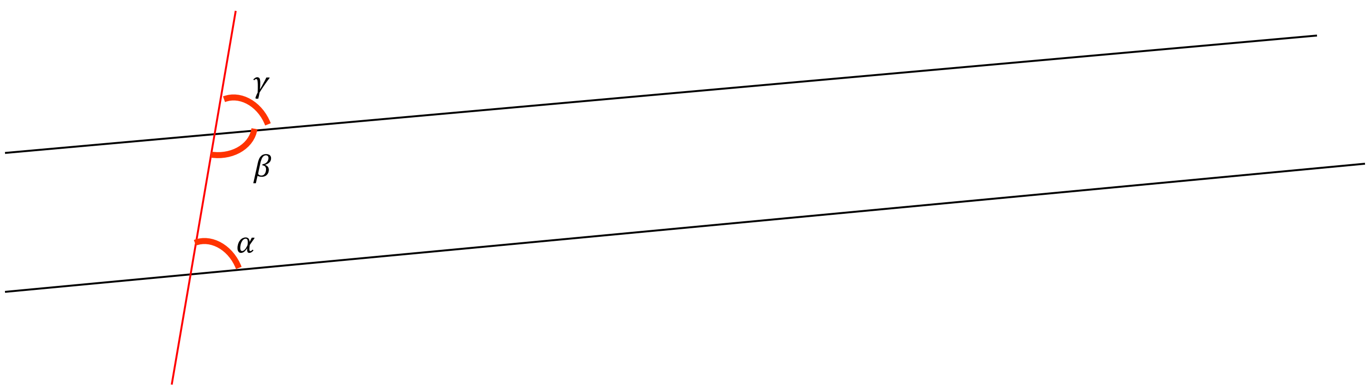
Bewijs hiermee de volgende stelling (opgave 10):

de lijnen zijn evenwijdig $\Longrightarrow$ F- en Z-hoeken zijn gelijk

Het vijfde postulaat

Uitwerking

$\angle\alpha$ en $\angle\gamma$ zijn F-hoeken.



Gegeven: $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$

Ook geldt: $\angle\gamma + \angle\beta = 180°$

$\rightarrow \angle\alpha = \angle\gamma$

Op dezelfde manier bewijs je de gelijkheid van de Z-hoeken.

Het vijfde postulaat

Als $P \Longrightarrow Q$ waar is geldt niet automatisch dat ook $Q \Longrightarrow P$ waar is.

Dus de volgende bewering is niet vanzelfsprekend waar:

de lijnen snijden elkaar $\Longrightarrow \angle\alpha + \angle\beta < 180°$

Dit is volgens de logica gelijkwaardig met:

$\angle\alpha + \angle\beta = 180° \Longrightarrow$ de lijnen zijn evenwijdig

Of met:

F- en *Z*-hoeken zijn gelijk $\Longrightarrow$ de lijnen zijn evenwijdig

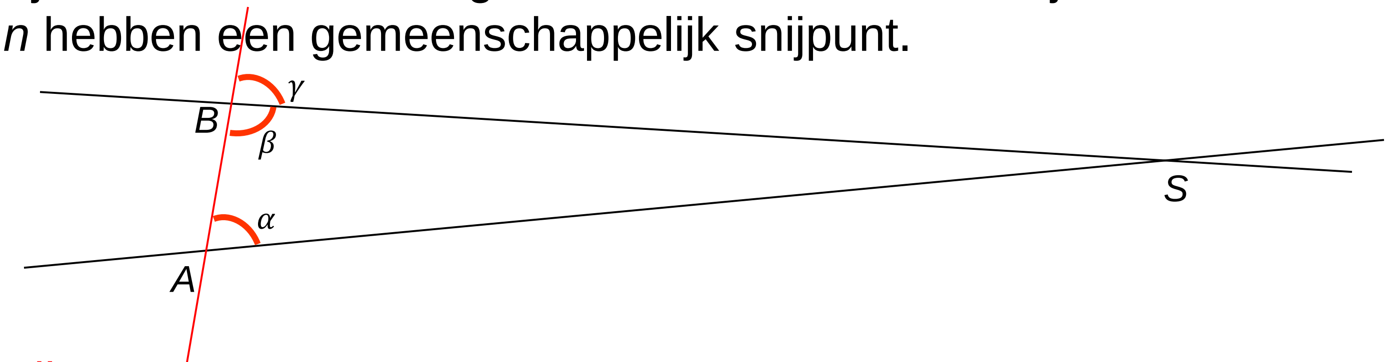
Deze laatste stelling wordt meestal gebruikt in bewijzen van evenwijdigheid.

Het omgekeerde vijfde postulaat

Gegeven (zie figuur)(opgave 9):

Twee lijnen *m* en *n* worden gesneden door een derde lijn.

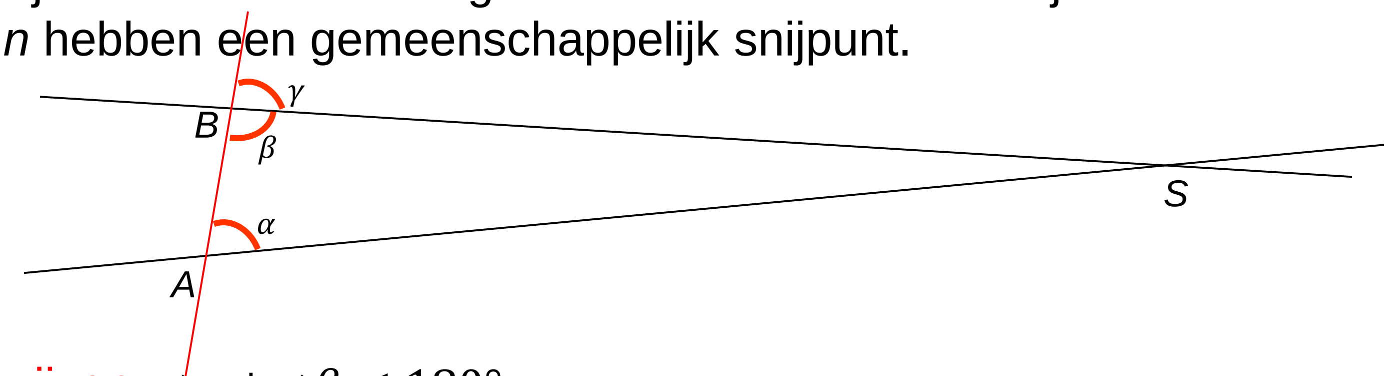
m en *n* hebben een gemeenschappelijk snijpunt.



Te bewijzen: $\angle\alpha + \angle\beta < 180°$

Het omgekeerde vijfde postulaat

Gegeven (zie figuur)(opgave 9):
Twee lijnen *m* en *n* worden gesneden door een derde lijn.
m en *n* hebben een gemeenschappelijk snijpunt.



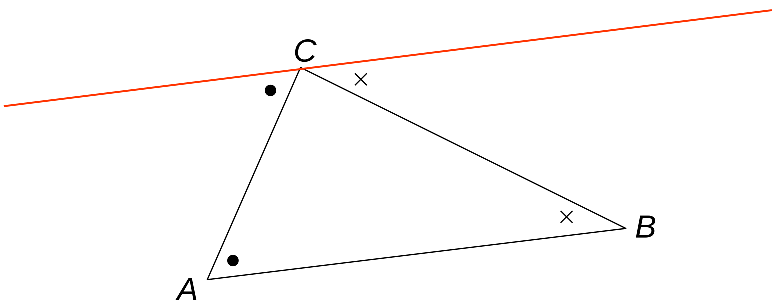
Te bewijzen: $\angle\alpha + \angle\beta < 180°$

Bewijs
In ΔASB is hoek $\angle\gamma$ een buitenhoek.
Dus $\angle\alpha < \angle\gamma$ volgens propositie 16.
Dan ook: $\angle\alpha + \angle\beta < \angle\gamma + \angle\beta$ (aanname 2)
→ $\angle\alpha + \angle\beta < 180°$

De som van de hoeken in een driehoek

Het vijfde postulaat $\Rightarrow$ De som van de hoeken in een driehoek is 180°

Gegeven: Het vijfde postulaat.



Te bewijzen:
De som van de hoeken in ΔABC is 180°.

Bewijs
Volgens het vijfde postulaat kun je een lijn door C evenwijdig aan AB tekenen.
Maak zelf het bewijs af.

De som van de hoeken in een driehoek

De som van de hoeken in een driehoek is 180° $\Rightarrow$ Het vijfde postulaat

Gegeven: De som van de hoeken in een driehoek is 180°

Te bewijzen: Het vijfde postulaat

Bewijs

Zie opgave 15 en 16.

De som van de hoeken in een driehoek

Conclusie:

De propositie “De som van de hoeken in een driehoek is 180°” is gelijkwaardig met het vijfde postulaat.

Oefenen

Lezen: Bladzijde 9 en 10

Maken: Opgave 15 en 16a,b en c.

Huiswerk

Inleveren: Opgave 16d.