Niet-euclidische meetkunde

Keuzeonderdeel Wiskunde D

Hans van Ballegooij
Maaslandcollege, Oss
Dictaat • Versie: 15 februari 2013

Een Wiskunde D-module voor HAVO/VWO 5 leerlingen die:

- Meer willen weten over Niet-euclidische meetkunde
- Willen ontdekken waarom bewijzen eigenlijk best wel leuk zijn
- Wel eens een ballonnetje willen opblazen
- Ook wel eens met Geogebra willen werken
- Niet bang zijn om eens goed te leren haken

Hans van Ballegooij
Maaslandcollege Oss

Inhoudsopgave

1 De elementen van Euclides 1

1.1 Inleiding 1

1.2 Euclidische bewijsvoering 7

1.3 twijfels over het parallellenpostulaat 9

Andere postulaten, gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat 9

Is het parallellenpostulaat nu wel of niet noodzakelijk? 12

2 Niet-euclidische meetkunde 13

2.1 Inleiding 13

2.2 Elliptische meetkunde 16

2.2.1

Bolmeetkunde 16

2.3 Een inleiding tot de hyperbolische meetkunde 20

3 Hyperbolische meetkunde 23

3.1 De poincaré-schijf 23

3.2 De wereld van Escher 27

3.3 een natuurlijk model voor de hyperbolische ruimte 29

Bijlage 1: definities, algemene inzichten, postulaten en proposities van Euclides 35

Definities 35

Algemene inzichten 37

postulaten 37

proposities 38

Werkbladen 43

Bronvermelding 45

WOORD VAN DANK

Hierbij wil ik Marianne Lambriex van het Stedelijk College te Eindhoven bedanken. Zonder haar inspirerende presentatie over een Wiskunde D klas die ze heeft leren haken in het kader van hun verkenning van de hyperbolische meetkunde was deze module nooit tot stand gekomen.

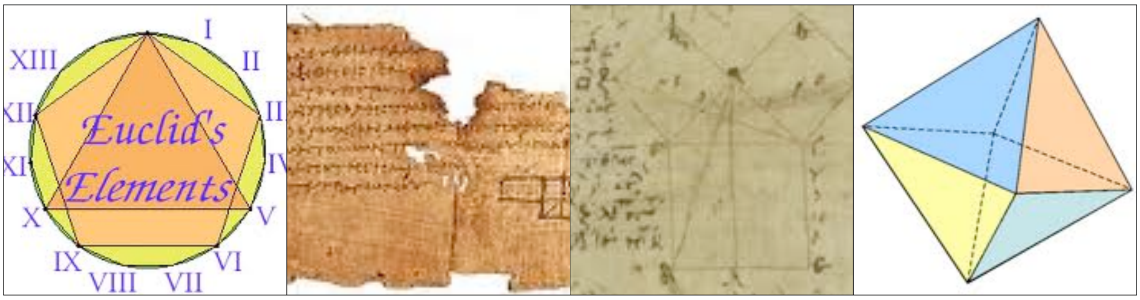
Verder wil ik mijn VWO6 leerlingen Willemijn Ruijs en Marjolein Lammerts bedanken. Zij hebben de uitdaging opgepakt om, in het kader van hun profielwerkstuk, samen met mij aan deze module te werken. Aan hun input en enthousiasme heb ik veel te danken.

En tenslotte dank aan mijn vrouw Marjory, die het geduld heeft opgebracht om mij een bepaalde periode te moeten delen met de computer.

1 De elementen van Euclides

Waar komt onze meetkunde eigenlijk vandaan?

1.1 INLEIDING



Waar komt onze meetkunde vandaan?

In de meetkunde zoals jij die kent ben je vertrouwd geraakt met een heleboel begrippen, afspraken en stellingen. Zo weet je wat een punt, een lijn en een cirkel zijn. Ook weet je dat de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180 graden, dat in een rechthoekige driehoek de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de schuine zijde (stelling van Pythagoras) en dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan . En je weet dat met π het getal 3,14... bedoeld wordt en met *r* de straal van de cirkel. En ook van het begrip straal kan je je een voorstelling maken.

Maar waar komt dit nu allemaal vandaan?

1 Volgens Wikipedia is een cirkel in de meetkunde een tweedimensionale figuur die wordt gevormd door alle punten die dezelfde afstand tot een bepaald punt hebben. In deze omschrijving komen vier begrippen voor die op zich ook weer gedefinieerd zouden moeten worden, namelijk: tweedimensionaal, figuur, punt en afstand.

a Zoek definities van deze begrippen op en neem deze over in je schrift. Vermeld ook de bron.

b Welke begrippen in jouw definities zouden op hun beurt weer gedefinieerd moeten worden?

In opdracht 1 heb je al gemerkt hoe moeilijk het is een begrip nauwkeurig te omschrijven. De omschrijving zelf kent ook weer begrippen die je moet omschrijven en zo blijf je bezig. Maar wiskunde heet niet voor niets een exact vak. Er is iemand die dit voor ons al allemaal heeft gedaan.

Euclides van Alexandrië

Euclides (Oudgrieks: Εὐκλείδης — Eukleídēs), ook Euclides van Alexandrië genoemd, was een Hellenistisch wiskundige, die rond het jaar 300 voor Christus werkzaam was in de bibliotheek van Alexandrië. Euclides wordt vaak de "vader van de meetkunde" genoemd.

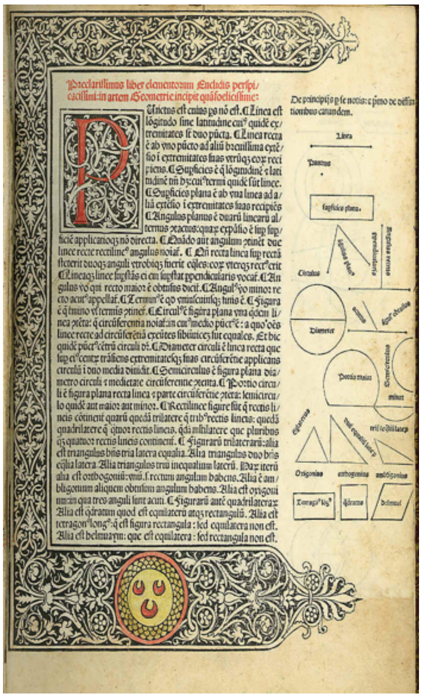
Zijn belangrijkste werk heet “De Elementen”. Dit geeft in 13 boeken de oudste systematische verhandeling over de meetkunde. Het is het meest succesvolle handboek en een van de invloedrijkste werken in de geschiedenis van de wiskunde. Het is, op de bijbel na, het boek geweest dat in de Westerse wereld het meest is geproduceerd en bestudeerd. De eerste druk van de Elementen stamt al uit 1482, voorafgegaan door vele handgeschreven kopieën.

Euclides van Alexandrië

In het eerste boek staan 23 definities, 5 algemene inzichten en 5 postulaten en alle bewijzen (proposities) die volgen met betrekking tot vierkanten, cirkels, scherpe hoeken, gelijkbenige driehoeken en dergelijke worden hieruit afgeleid. Veel van de door hem geformuleerde theorieën in dit boek worden nog steeds onderwezen aan leerlingen en studenten overal ter wereld.

Een ander noemenswaardig en amusant feitje is dat Euclides de alom bekende term bestaande uit de woorden quod erat demonstrandum (q.e.d., “wat bewezen moest worden”) voor het eerst geïntroduceerd heeft. Deze worden gebruikt om aan te geven dat een bewijs beëindigd is.

In een bijlage bij dit dictaat vindt je een overzicht van de definities, algemene inzichten, postulaten en proposities zoals Euclides deze heeft geformuleerd.


De elementen van Euclides

2 Kijk naar het plaatje hiernaast, dit is de eerste pagina van de Elementen van Euclides, uit de eerste gedrukte versie uit 1482. Van welke begrippen komen beschrijvingen aan de orde denk je?

3 Neem de algemene inzichten uit de bijlage door. Het eerste algemene inzicht kun je ook algebraïsch weergeven:

Als $a = c$ en $b = c$ dan volgt hier uit $a = b$.

Geef op soortgelijke wijze de andere 4 algemene inzichten weer.

De definities van een punt, lijn en rechte lijn zijn behoorlijk abstract. Intuïtief weten we wel wat er bedoeld wordt, maar toch.....

De eerste constructie die Euclides beschrijft (Propositie I-1) is hoe men op een gegeven lijn (in dit geval wordt hiermee een lijnstuk bedoeld) een gelijkzijdige driehoek kan construeren door uitsluitend gebruik te maken van passer en liniaal (een liniaal heeft bij Euclides geen maatstrepen en de benen van een passer klappen gelijk dicht zodra je de passer van het papier afhaalt). De constructie gaat als volgt:

Gegeven een lijnstuk AB. Construeer een gelijkzijdige driehoek ABC.
Constructie: volgens het derde postulaat is het mogelijk een cirkel te tekenen met A als middelpunt en AB als straal. Ook is het mogelijk een cirkel te tekenen met B als middelpunt en AB als straal. Deze twee cirkels snijden elkaar in een punt C. Volgens definitie 15 is $AC = AB$, maar ook $BC = AB$. Dus is (algemeen inzicht 1) $AC = BC = AB$ en dus is figuur ABC (definitie 20) een gelijkzijdige driehoek.
quod erat faciendum (q.e.f., "wat te construeren was", een andere term die Euclides heeft geïntroduceerd).

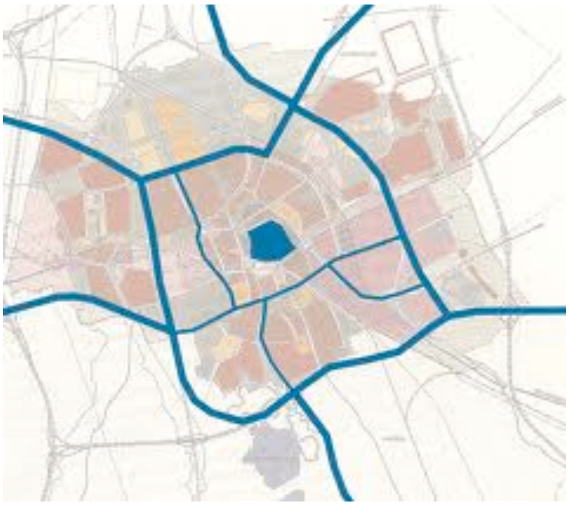
4 **a** Construeer gelijkzijdige driehoek ABC volgens bovenstaand recept.

b Ook in deze constructie zit strikt genomen een aanname die niet zomaar uit de definities, algemene inzichten en postulaten van Euclides volgt. Intuïtief weten we wel dat het zo is, maar toch.... Welke aanname is dat?

De hedendaagse wiskunde behoeft meer precisie dan Euclides bood, daarom grijpt deze terug op de axiomatische (axioma: onbewezen stelling die we voor waar aannemen) behandeling van de meetkunde door Davis Hilbert (1899). Voor de doelstellingen van deze module voldoet Euclides echter prima.

Een laatste begrip dat we in deze inleiding willen introduceren is het begrip “afstand”. Volgens Wikipedia is “afstand” een algemeen begrip voor de ruimte tussen twee niet samenvallende zaken. En als deze ruimte gemeten wordt dan is afstand een maat voor die ruimte. Het hangt daarbij van de toegepaste meetkunde af, hoe afstand is gedefinieerd.

Denk als voorbeeld aan een stad en de afstand die een auto moet afleggen om van een punt *A* naar een punt *B* te gaan. De afgelegde weg zal in veel gevallen geen rechte lijn zijn en ook is het heel goed mogelijk, vanwege eenrichtingswegen, dat de afstand van *A* naar *B* anders is dan de afstand van *B* naar *A*. Algemeen is de afstand van het punt *A* naar het punt *B* het aantal keren dat een standaardmaat afgepast kan worden op de kortste verbindingsweg van *A* naar *B*.



Stratenplan

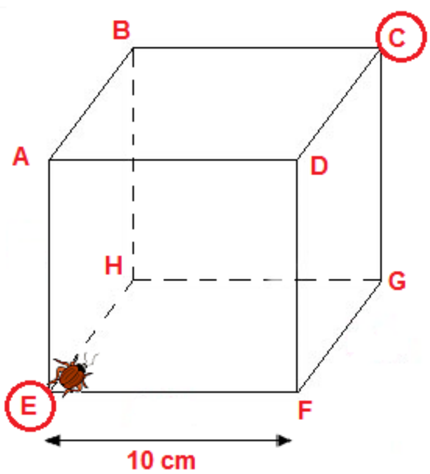
Als standaardmaat wordt tegenwoordig voor lengtemetingen veelal de meter genomen.

In de Euclidische meetkunde kunnen we zeggen dat de (kortste) afstand tussen twee punten de lengte is van het rechte lijnstuk dat deze twee punten verbindt. Als we twee punten *A* en *B* op papier hebben getekend, dan kunnen we deze afstand ook vinden door het papier langs de punten *A* en *B* te vouwen. De vouw is een rechte lijn. En de lengte van de vouw tussen *A* en *B* (de lengte van dat rechte lijnstuk) is de afstand tussen *A* en *B*. Het idee van “vouwen om een rechte lijn, de kortste verbinding, te vinden” zit ook in de volgende opgave. We komen er later nog op terug.

5 Een kevertje zit opgesloten in een kubus met 10 cm zijde. Hij wil van *E* naar *C*. Hij kan over alle vlakken lopen, zelfs ondersteboven mocht dat nodig zijn.

a Hoe moet hij lopen om langs de kortste weg van *E* naar *C* te gaan? En welke afstand legt hij daarbij af?

b Als de kever zich als een boktor dwars door de kubus een weg zou kunnen banen, wat is dan de afstand die hij aflegt?



Dat het begrip afstand zich soms niets aantrekt van alle logica blijkt wel uit de volgende paradox (Paradox: een ogenschijnlijk tegenstrijdige situatie, die lijkt in te gaan tegen ons gevoel voor logica, onze verwachting of onze intuïtie):

De paradox van Achilles en de schildpad
(toegeschreven aan Zeno van Elea, ca. 450 v Chr.)

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloopwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de Schildpad zwaar en langzaam was.

"Hoeveel voorsprong?" vroeg hij de Schildpad met een glimlach.
"Tien meter," antwoordde deze.
Achilles lachte harder dan ooit. "Dan ga jij zeker verliezen, vriend" vertelde hij de Schildpad, "maar laten we vooral rennen, als je dat graag wilt."
"In tegendeel," zei de Schildpad, "ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen."
"Kom op dan," antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan eerst. Hij wist dat hij de superieure atleet was, maar hij wist ook dat de Schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

"Veronderstel," begon de Schildpad, "dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kunt afleggen?" "Zeer snel," bevestigde Achilles. "En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?" "Misschien een meter - niet meer," zei Achilles na even nagedacht te hebben. "Zeer goed," antwoordde de Schildpad, "dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?" "Zeer snel inderdaad!" "En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u DIE afstand moet inhalen, ja?" "Eeh, ja" zei Achilles langzaam. "En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen" ging de Schildpad stug door. Achilles zei niets. "En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen." "Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen," antwoordde Achilles, nu al vermoeid. "En zo kunt u nooit de achterstand inlopen," besloot de Schildpad met een sympathieke glimlach.

"U heeft gelijk, zoals altijd," besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

6 De paradox kan verklaard worden door naar het verloop van de tijd te kijken. Stel dat Achilles 5 meter per seconde loopt, en de schildpad 0,5 meter per seconde (jawel, het is een erg snelle schildpad!). Verder gaan we er van uit dat de schildpad 5 meter voorsprong krijgt.

a Na hoeveel tijd heeft Achilles die 5 meter ingehaald en hoeveel verder is de schildpad dan?

b En hoeveel tijd is er in totaal verstreken als Achilles ook die afstand heeft ingehaald, en hoeveel verder is de schildpad dan?

c En opnieuw vraag b.

d En als we zo “eeuwig” doorgaan, hoeveel tijd verstrijkt er dan in totaal? Schrijf je antwoord als breuk.

e Na hoeveel tijd heeft Achilles de schildpad ingehaald?

1.2 EUCLIDISCHE BEWIJSVOERING

We keren terug naar de definities, algemene inzichten, postulaten en proposities van Euclides uit de bijlage. Deze vormen dus de spelregels die je gebruikt bij het redeneren in de Euclidische meetkunde. Hoewel “ouderwets” van taal zijn de spelregels op zich niet moeilijk te volgen of te begrijpen. Er is echter één uitzondering, het vijfde postulaat, oftewel het parallellenpostulaat. In de woorden van Euclides:

Parallellenpostulaat

“En laat geëist zijn dat, als een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant, waar de hoeken kleiner zijn dan twee rechte hoeken.”

Ook in een modern jasje blijft het parallellenpostulaat, zoals geformuleerd door Euclides, ingewikkeld:

“Als twee rechte lijnen *l* en *m* gesneden worden door een derde rechte lijn *k*, en de binnenhoeken α en β aan één kant van k zijn samen minder dan 180°, dan snijden *l* en *m* elkaar aan diezelfde kant van *k*.”

7 Geef deze laatste formulering van het parallellenpostulaat weer in een tekening.

Om te oefenen met “Euclidische bewijsvoering” gaan we in de volgende opgaven een aantal proposities bewijzen. Houdt hierbij steeds de volgende structuur aan:

Gegeven:
Schrijf de gegevens op, eventueel met een tekening van de situatie.

Te bewijzen (construeren):
Schrijf op wat je moet bewijzen (construeren).

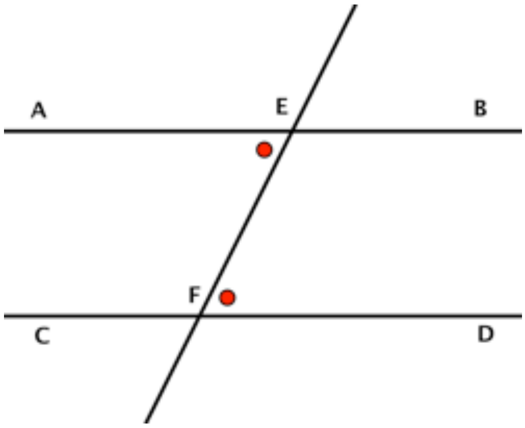
Bewijs:
Geef het bewijs, met voor iedere stap duidelijke verwijzingen naar algemene inzichten, postulaten en eerder bewezen of aangenomen proposities.

Eindig met:
Q.E.D (Quod Erat Demonstrandum, hetgeen te bewijzen was) of Q.E.F (Quod Erat Faciendum, hetgeen te construeren was).

(Had Euclides in deze moderne tijd geleefd had hij zijn bewijzen wellicht beeindigd met een smiley ☺)

8 Bewijs propositie I.15 (*X*-hoeken). Gebruik hierbij de hierboven genoemde structuur en bedenk dat je uitsluitend gebruik mag maken van eerder bewezen proposities.

9 In deze opgave bewijzen we propositie I.27 en I.28 (als er sprake is van *Z*-hoeken of *F*-hoeken dan zijn de lijnen evenwijdig). In de figuur hiernaast: stel dat de rode hoeken gelijk zijn, en dat de lijnen *AB* en *CD* elkaar toch ergens in een punt *P* aan de rechterkant snijden. Dan is er dus een driehoek *PEF*.



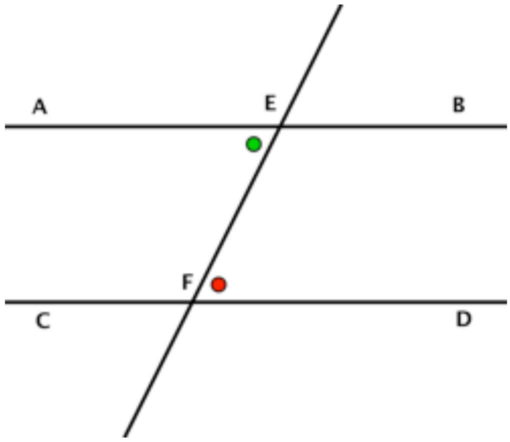
a Toon met behulp van propositie I.16 aan dat dit onmogelijk is.

b Bewijs propositie I.27.

c Bewijs propositie I.28.

10 In deze opgave bewijzen we propositie I.29 (als lijnen evenwijdig zijn dan is er sprake van gelijke *Z*-hoeken en *F*-hoeken). Dit is de omgekeerde stelling van proposities I.27 en I.28 en tevens de eerste propositie waarvoor Euclides het parallellenpostulaat nodig had.

Stel dat de twee hoeken in de figuur hiernaast NIET aan elkaar gelijk zijn, dus stel bijvoorbeeld dat $\angle AEF > \angle DFE$.



a Tel bij beide hoeken in deze ongelijkheid $\angle FEB$ op en gebruik vervolgens het parallellenpostulaat om te laten zien dat de lijnen elkaar dan moeten snijden.

b Bewijs hiermee dat de Z-hoeken gelijk zijn.

c Bewijs dat dan ook de F-hoeken aan elkaar gelijk moeten zijn.

11 **a** Bewijs propositie I.32
(Tip: gebruik propositie I.31 en opgave 10).

b Hoe komt in het bewijs naar voren dat je het parallellenpostulaat gebruikt?

1.3 TWIJFELS OVER HET PARALLELLENPOSTULAAT

Misschien wel omdat het parallellenpostulaat zo ingewikkeld is geformuleerd in vergelijking met de andere postulaten, is lange tijd gedacht dat het parallellenpostulaat overbodig was. Met andere woorden, men dacht lange tijd dat het vijfde postulaat uit de andere algemene inzichten en postulaten af te leiden zou zijn of te vervangen door een eenvoudiger postulaat dat tot dezelfde meetkunde leidt. Ook Euclides zelf had gemengde gevoelens over het postulaat. Dit blijkt uit het feit dat hij niet eerder van dit postulaat gebruik maakte tot Propositie I.29. Bij de proposities I.1 tot en met I.28 is dus geen gebruik gemaakt van het parallellenpostulaat.

De Griekse commentator Proclus Diadochus (410 – 485 na Christus) vertelt ons dat het postulaat al vanaf het begin werd aangevallen. Proclus schreef een commentaar op de elementen en bespreekt hierin een aantal pogingen om het vijfde postulaat uit de eerste vier af te leiden. Hij bekritiseerde in het bijzonder Ptolemeus' afleiding, die naar zijn zeggen incorrect was... en vervolgens geeft hij echter zelf ook een incorrecte afleiding! Verder schreef hij over het befaamde postulaat: “Dit postulaat lijkt te zijn doorgehaald uit de gezamenlijke postulaten; dit omdat het slechts een theorie is...”.

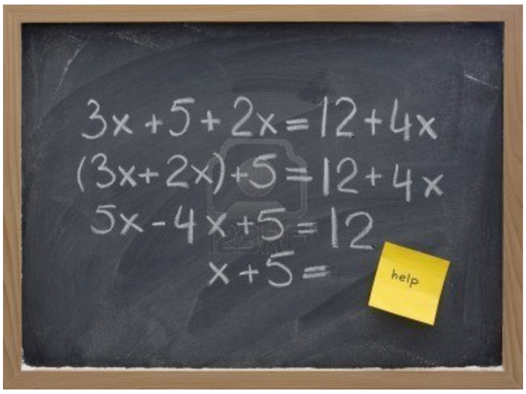
Andere postulaten, gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat

Er zijn talloze pogingen gedaan om het postulaat te herformuleren. Dit leverde geen nieuwe waarheden op maar slechts verklaringen die lijken op het postulaat zelf.

Wat al die pogingen wel hebben opgeleverd, is een hele reeks van postulaten die ieder *gelijkwaardig* zijn aan het parallellenpostulaat.

12 Wat wordt bedoeld met “gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat”?

13 Een leerling uit de brugklas beweert dat $3x+5+2x=12+4x$



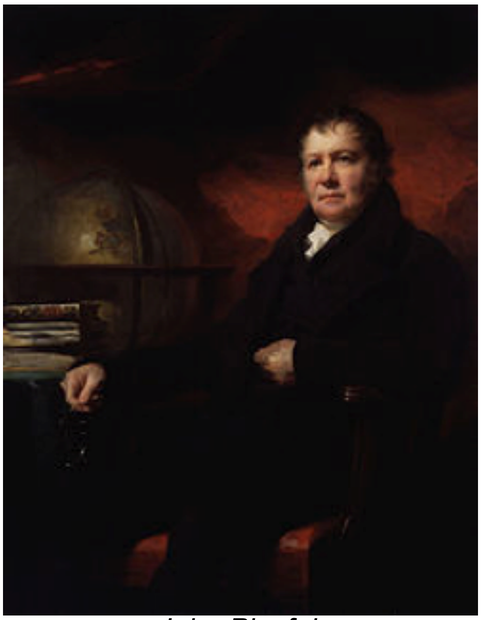
a Waarom is dit fout?

b Los op: $3x+5+2x=12+4x$

c Verklaar het bovenstaande (het is fout en toch kun je het oplossen) met behulp van het begrip gelijkwaardigheid.

Een van de meest bekende uitspraken gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat is die van John Playfair. Deze formulering stamt uit 1795 en staat bekend als “Playfair’s axioma” (voor het eerst beschreven door Playfair in een commentaar op de Elementen). Het postulaat luidt als volgt:

“Door een gegeven punt buiten een rechte lijn gaat precies één rechte die evenwijdig is aan die lijn.”


John Playfair

Deze omschrijving lijkt enerzijds op het parallellenpostulaat, maar is anderzijds vanwege z’n formulering intuïtief veel makkelijker te begrijpen. In de Euclidische meetkunde wordt daarom vaak Playfair’s axioma gebruikt in plaats van het parallellenpostulaat.

Twee andere postulaten, gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat zijn:

De stelling van Pythagoras:
In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.

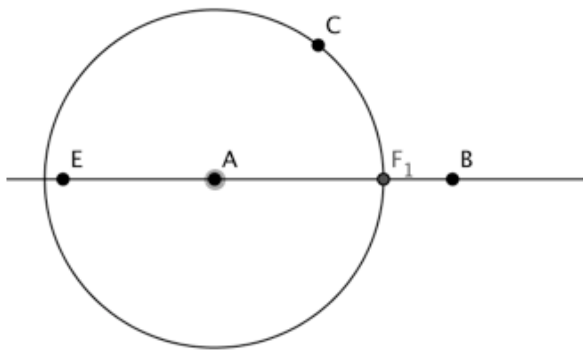
Hoekensom van een driehoek:
In iedere driehoek is de som van de hoeken gelijk aan 180°.

We gaan in de volgende drie opgaven aantonen dat het postulaat over de hoekensom van een driehoek gelijkwaardig is aan het parallellenpostulaat. In opgave 11 hebben we al bewezen dat uit de postulaten (inclusief het parallellenpostulaat) volgt dat de som van de hoeken in een driehoek gelijk is aan 180°. Om de gelijkwaardigheid aan te tonen moeten we dus bewijzen dat als we de vier postulaten aannemen én aannemen dat de hoekensom in een driehoek gelijk is aan 180°, dat dan hieruit het parallellenpostulaat volgt. Omdat we de eerste 28 proposities hebben bewezen zonder gebruik te maken van het parallellenpostulaat, mogen we daarbij ook deze 28 proposities als waar aannemen. In de volgende drie opgaven zijn dat dan ook onze uitgangspunten.

14 Bewijs dat in een driehoek de buitenhoek gelijk is aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

Het resultaat van opgave 14 gebruiken we in opgave 15.

15 Gegeven een lijn AB en een punt C niet op deze lijn. Verder is punt F_1 op lijn AB geconstrueerd zó dat $AC = AF_1$, zie tekening.



a Bewijs dat $\angle AF_1C = \frac{1}{2}\angle CAE$. Gebruik hierbij opgave 14.
Construeer punt F_2 op lijn AB, rechts van F_1, zó dat $F_1C = F_1F_2$.

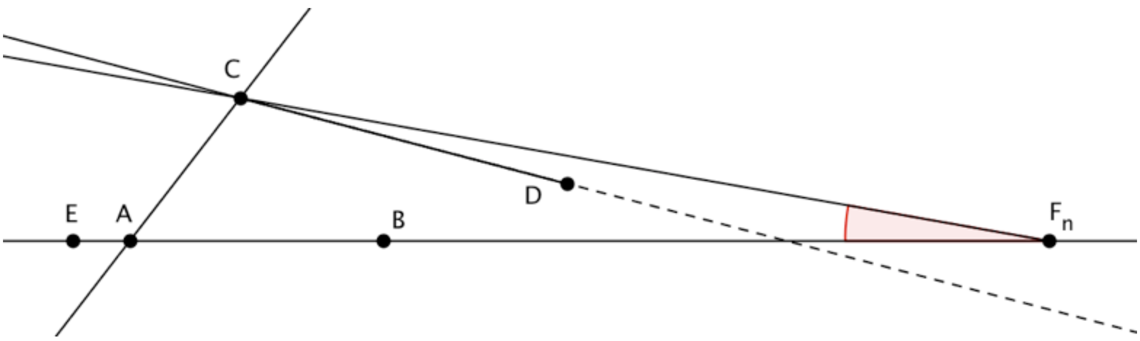
b Bewijs dat
$\angle AF_2C = \frac{1}{2}AF_1C = (\frac{1}{2})^2\angle CAE = \frac{1}{4}\angle CAE$
Construeer punt F_3 op lijn AB, rechts van F_2, zó dat $F_2C = F_2F_3$.

c Bewijs dat
$\angle AF_3C = (\frac{1}{2})^3\angle CAE = \frac{1}{8}\angle CAE$.

d Bewijs dat het mogelijk is een driehoek AF_nC te construeren waarbij $\angle AF_nC < 10°$.

e Waarom kan in opgave 15d in plaats van $10°$ ook $1°$, $0{,}1°$ of $0{,}01°$ of willekeurig welke kleine positieve hoek worden gelezen?

Het resultaat van opgave 15 gebruiken we in opgave 16 om het parallellenpostulaat te bewijzen.



In bovenstaande tekening zie je twee lijnen AB en CD waarbij lijn AC lijnen AB en CD zodanig snijdt dat $\angle BAC + \angle DCA < 170°$. Verder is een driehoek geconstrueerd waarbij $\angle AF_nC < 10°$. Dat dit mogelijk is weten we uit opgave 15d.

16 **a** Toon aan dat $\angle ACF_n > \angle ACD$.

b Waarom volgt hieruit dat lijn CD lijn AB ergens tussen A en F_n snijdt?

c Stel nu dat $\angle BAC + \angle DCA < 179°$. Toon aan dat lijn CD lijn AB ergens snijdt.

d Toon het parallellenpostulaat aan.

Is het parallellenpostulaat nu wel of niet noodzakelijk?

Het is nooit gelukt om het vijfde postulaat te bewijzen uit de andere vier postulaten. In de vele pogingen die door de eeuwen heen gedaan zijn, bleek uiteindelijk altijd een fout te zitten. En die fout was bijna altijd dezelfde: er werd een ‘voor de hand liggende’ eigenschap gebruikt, die achteraf gelijkwaardig bleek te zijn aan het vijfde postulaat.

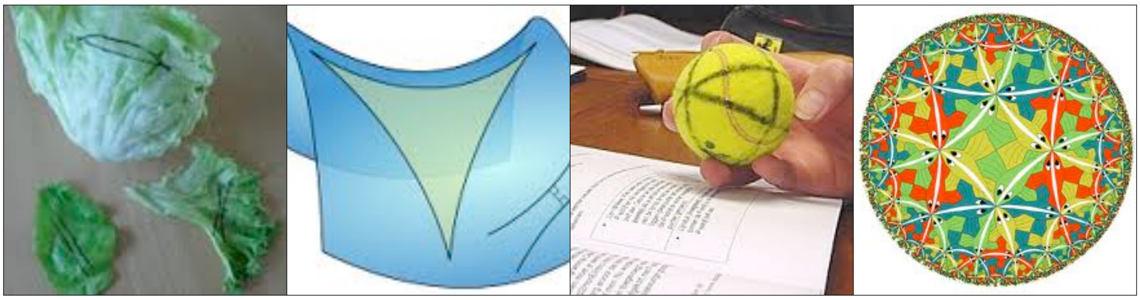
Zo dacht in 1663 Wallis het vijfde postulaat afgeleid te hebben, door de volgende ‘voor de hand liggende’ eigenschap te gebruiken: voor elke driehoek bestaat er een grótere driehoek, die gelijkvormig is aan de eerste. En inderdaad, met deze eigenschap kun je het vijfde postulaat bewijzen.

Maar helaas, later bleek dat je omgekeerd met behulp van het parallellenpostulaat de stelling van Wallis kunt bewijzen. Ook de stelling van Wallis is dus gelijkwaardig aan het parallellenpostulaat.

2 Niet-euclidische meetkunde

Er bestaat meer dan onze platte meetkunde

2.1 INLEIDING



Meer dan platte meetkunde

Tegenwoordig noemen we de meetkunde waarin de vijf postulaten van Euclides geldig zijn de Euclidische meetkunde. Dat suggereert dat er ook zoiets bestaat als niet-euclidische meetkunde, meetkunde waarin de postulaten van Euclides niet (allemaal) geldig zijn. En dat is inderdaad het geval. In de niet-euclidische meetkunde wordt aan het begrip 'rechte lijn' een andere invulling gegeven dan Euclides bedoeld had. Daarbij wordt niet aan het parallellenpostulaat voldaan, maar wel aan de andere axioma's van Euclides.

Juist door zich af te vragen of er een meetkunde bestond waarin de eerste vier postulaten geldig zijn en het vijfde niet, kon in het begin van de negentiende eeuw eindelijk het probleem van het vijfde postulaat worden opgelost. János Bolyai, Nikolai Ivanovici Lobacevski en Carl Friedrich Gauss waren hierin de voorlopers.

János Bolyai

De jonge wiskundige János Bolyai publiceerde in 1832 een werk over niet-euclidische meetkunde.

Hij liet zien dat er een wiskundig "huis" bestaat met alleen de eerste vier postulaten van Euclides als fundamenten, waarin het vijfde postulaat niet waar is. De meetkunde van dit wiskundige huis wordt nu hyperbolische meetkunde genoemd.

Bolyai liet zien dat het vijfde postulaat in hyperbolische meetkunde niet waar was, terwijl Euclides' vier andere postulaten gewoon geldig waren. Hiermee toonde hij meteen aan dat het onmogelijk was om het vijfde postulaat te bewijzen uit de vier andere postulaten: als dat had gekund, dan had zijn hyperbolische meetkunde nooit kunnen bestaan! In moderne wiskundige termen: Bolyai liet zien dat het vijfde postulaat onafhankelijk was van de andere vier postulaten.

Al die pogingen om te laten zien dat het parallellenpostulaat overbodig was waren dus tot mislukken gedoemd. En dit toont weer aan hoe bekwaam Euclides was, omdat hij meer dan 2000 jaar geleden al inzag dat hij het vermaledijde parallellenpostulaat als onafhankelijk axioma nodig had!

In de niet-euclidische meetkunde onderscheiden we twee verschillende soorten meetkunde:
de elliptische meetkunde en de hyperbolische meetkunde.

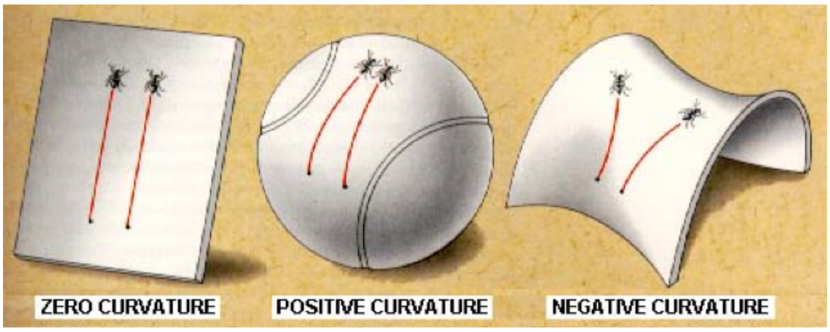
Gegeven een lijn en een punt buiten deze lijn:

Euclidische meetkunde
Dan gaat er door dit punt precies één lijn parallel aan de gegeven lijn.
(Dit is de moderne formulering van het vijfde postulaat)

Niet-euclidische meetkunde: Elliptische meetkunde
Dan gaat er door dit punt geen enkele lijn die parallel is aan de gegeven lijn.
Een bijzondere vorm hiervan is de bolmeetkunde.

Niet-euclidische meetkunde: Hyperbolische meetkunde
Dan gaan er door dit punt oneindig veel lijnen die parallel zijn aan de gegeven lijn.

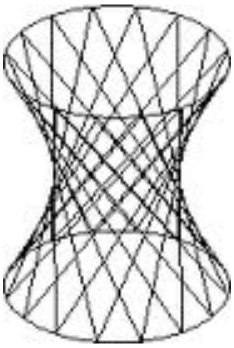
Bij ieder van deze meetkundes hoort overigens ook een bepaalde (Gaussiaanse) kromming die we aanduiden met 0 (het platte vlak), + (een boloppervlak) en – (het hyperbolische vlak).

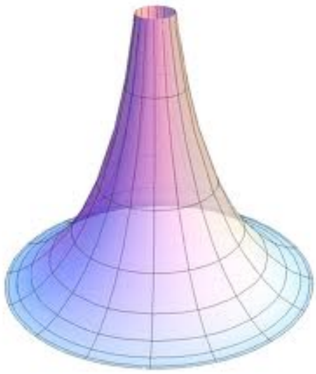


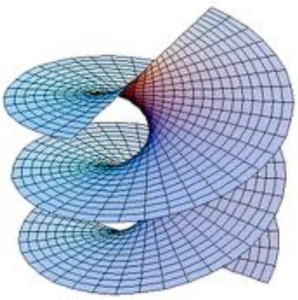
Voorwerpen met een positieve kromming "buigen in ieder punt in twee richtingen dezelfde kant op (bol-bol)". Voorwerpen met een negatieve kromming "buigen in ieder punt in twee richtingen verschillende kanten op (bol-hol)". Voorwerpen met een (Gaussiaanse) kromming van 0 zijn voorwerpen die in tenminste één richting plat zijn. Deze eigenschap maakt dat deze voorwerpen "uit te vouwen zijn" tot in het platte vlak.

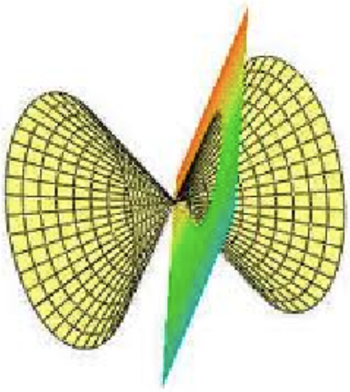
17 **a** Geef van ieder van de volgende voorwerpen aan of deze een positieve, een negatieve, of een Gaussiaanse kromming van 0 heeft.

b Ga op zoek naar andere voorwerpen met +, - of 0 kromming en neem van iedere groep twee voorbeelden op in je verslag.







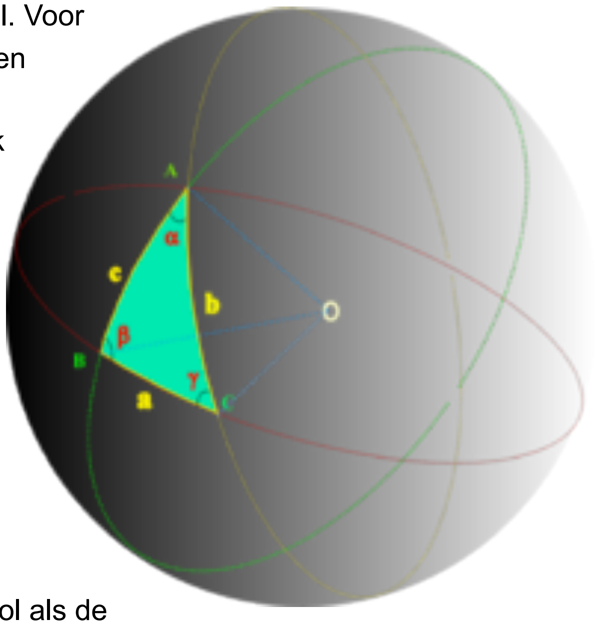


2.2 ELLIPTISCHE MEETKUNDE

“Door een punt buiten een gegeven lijn is geen enkele lijn te trekken die evenwijdig is aan die gegeven lijn”.

In eerste instantie lijkt dit wellicht onvoorstelbaar, maar een voorbeeld van deze meetkunde is dichterbij dan je wellicht denkt. Riemann was een van de eersten die een systeem beschreef van een 'vlakke' meetkunde op het oppervlak van een bol. Het oppervlak van een bol is niet echt vlak, maar lijkt dat wel van heel dichtbij gezien.

2.2.1 Bolmeetkunde



We gaan meetkunde bedrijven op een bol. Voor de volgende opgaven is het handig om een bol (bal, ballon) bij de hand te hebben waarop je kunt tekenen. Je kunt natuurlijk ook gewoon een bol in je schrift tekenen.

Hoe definiëren we een rechte lijn op een bol? Eerder hebben we de (kortste) afstand tussen twee punten gedefinieerd als de lengte van het rechte lijnstuk dat deze twee punten verbindt. We draaien het nu om:

Definitie: We definiëren een rechte lijn (lijnstuk) door de punten *A* en *B* op een bol als de kortste verbinding tussen deze twee punten.

18 Rome ($41°,54'$ noord, $12°,30'$ oost) en New York ($41°,9'$ noord, $74°$ west) liggen ongeveer op dezelfde breedtegraad. Een vliegtuig vliegt van Rome naar New York.

a Beschrijf wat jij denkt dat de kortste verbinding is tussen deze twee steden. Je kunt eventueel een tekening maken.

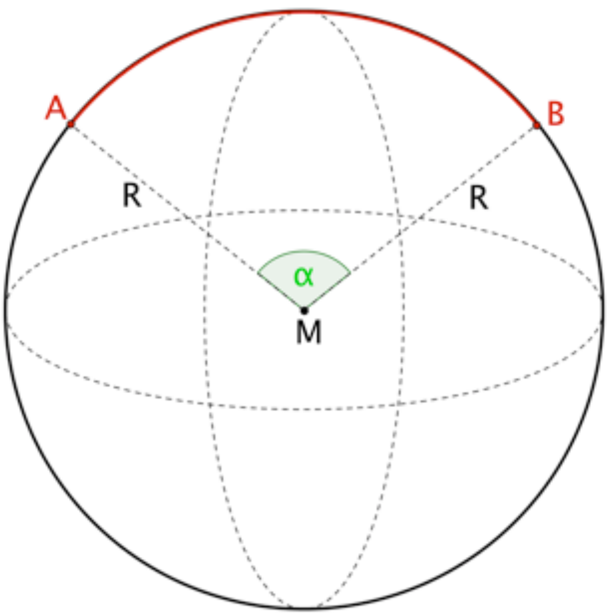
b Blaas (eventueel thuis) een ronde ballon op en laat iemand deze voor je dichthouden (dus niet dichtknopen!). Schets op de ballon de ligging van Rome en New York (met een *R* en een *N*. Gebruik de coördinaten zoals hierboven gegeven om (ongeveer) de locatie te bepalen. Teken ook de evenaar. Gebruik een touwtje om Rome en New York met elkaar te verbinden. Op welke manier is het touwtje het kortst? Teken deze route op de bal. Komt deze route overeen met wat je bij opgave a dacht?

c Als je deze route aan beide zijden verlengt krijg je een cirkel over de bol. Teken ook deze cirkel. Vergelijk de straal van deze cirkel met de straal van de bol. Wat valt je op?

d Laat de lucht weer uit de ballon ontsnappen. Pak de ballon vast bij de punten *R* en *N* en vouw de ballon langs de punten *R* en *N* in een rechte lijn. Trek de lijn strak. Komt deze lijn overeen met de door jou getekende lijn?

In opgave 17 heb je het volgende ontdekt:

Een (rechte) lijn door twee punten *A* en *B* op een bol is een zogenaamde grootcirkel. Dat is een cirkel door *A* en *B* die hetzelfde middelpunt en dezelfde straal heeft als de bol. Ook het idee van “vouwen om een rechte lijn, de kortste verbinding, te vinden” uit het begin van dit dictaat blijft gelden: als we de bol laten “leeglopen” , vouwen langs *A* en *B* en vervolgens rechttrekken, krijgen we precies de kortste afstand (zie het rode lijnstuk in de figuur hiernaast).



19 Als in de figuur hierboven α is gegeven in radialen dan is de afstand tussen *A* en *B* gelijk aan αR .

a Leg dit uit.

b Wat voor eis moet je daarbij aan α stellen?

20 **a** Denk aan twee punten op de bol die diametraal tegenover elkaar liggen (zoals op de wereldbol de Noordpool en de Zuidpool). We noemen dergelijke punten wel elkaars antipode. Hoeveel grootcirkels zijn dan door die punten te trekken?

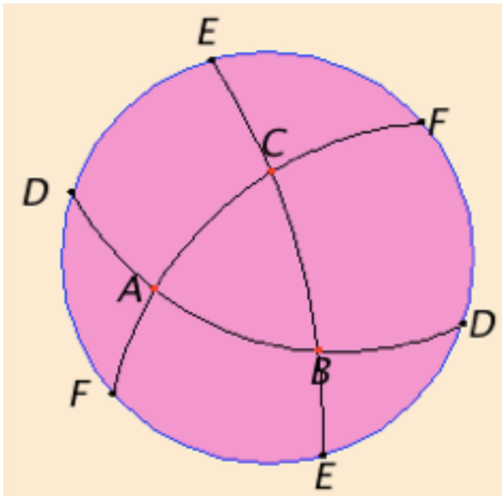
b In de figuur van opgave 19, hoeveel lijnstukken zijn van A naar B te trekken?

c Voldoet onze definitie van punten en lijnen aan postulaat 1?

Naar aanleiding van opgave 20 passen we onze definitie van “punt op een bol” aan (we hadden trouwens nog helemaal geen definitie gegeven maar waren hier tot nu toe niet mee in de problemen gekomen):

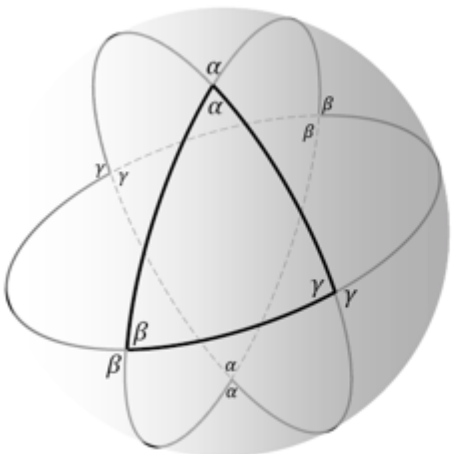
Definitie: ieder punt op een bol bestaat uit twee locaties die elkaars antipode zijn.
Met deze definitie zijn de Noordpool en de Zuidpool samen dus één punt!

In de figuur hiernaast zie je een bol met daarop de punten *A*, *B* en *C*.
Het “tweede deel” van deze punten zie je niet omdat deze “aan de achterkant” van de bol liggen.
De punten *D*, *E* en *F* zijn wel volledig te zien.



Definitie: de hoek tussen twee lijnen is de hoek tussen de twee vlakken waarin de grootcirkels liggen. In de figuur hierboven: de lijnen door *AC* en *BC* definiëren twee vlakken die elkaar onder een bepaalde hoek snijden: $\angle ACB$.

21 **a** Is door ieder tweetal punten op een bol precies één lijn te trekken?
Is tussen ieder tweetal punten precies één lijnstuk te trekken?
Is het eerste postulaat geldig?



b Kan ieder lijnstuk verlengd worden tot een rechte lijn?
Is het tweede postulaat geldig?

c In de Euclidische meetkunde verdeelt een lijn het platte vlak in twee delen. Als ik een punt in het ene deel verbindt met een punt in het andere deel dan snijdt deze lijn de gegeven lijn. Hoe is dat op een bol?

d Zijn het derde en het vierde postulaat geldig?

22 Construeer willekeurige lijnen (grootcirkels) op een bol en onderzoek of ze elkaar snijden.

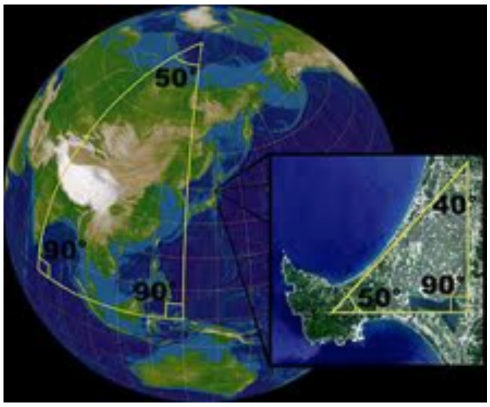
Verwijder alle lijnen op één na en kies een punt dat niet op die lijn ligt.

a Hoeveel lijnen gaan er door dit punt die de gegeven lijn niet snijden?

b Is het vijfde postulaat geldig?

23 Teken willekeurige driehoeken en probeer een inschatting te maken van de hoekensom van de driehoeken.

Wat geldt voor de hoekensom? Wat is de minimaal mogelijke hoekensom? En de maximale?



2.3 EEN INLEIDING TOT DE HYPERBOLISCHE MEETKUNDE

“Door een punt buiten een gegeven lijn zijn oneindig veel lijnen te trekken die evenwijdig zijn aan die gegeven lijn”. Wat kun je je daarbij nu voorstellen?

Helaas is de hyperbolische ruimte erg moeilijk visueel voor te stellen. Dat maakt deze hyperbolische ruimte echter niet minder relevant. Om de ruimte waarin we leven te beschrijven hanteren veel sterrenkundigen bijvoorbeeld een hyperbolisch (open) model, waarin de cosmos 'negatief gekromd' is. Het heelal dijt daarbij uit en die uitdijing zal volgens hen nooit stoppen. Het heelal kent in hun ogen vier dimensies en is dus ook niet “zomaar” voor te stellen in onze drie-dimensionale wereld.

Flatland: A Romance of Many Dimensions (Nederlands: Platland: een roman van vele afmetingen) is geschreven door Edwin Abbott Abbott (1838 - 1926) en probeert de lezer op informele wijze de mogelijkheid van meerdere dimensies uit te leggen.
Flatland volgt de avonturen van A. Square (Nederlands: Een Vierkant) die op een dag wordt bezocht door Een Cirkel (die eigenlijk Een Bol blijkt te zijn die als cirkel verschijnt in Flatland) en die hem uit z'n tweedimensionale wereld tilt en hem meeneemt naar Lijnland en Puntland om hem duidelijk te maken dat er meer dimensies zijn dan alleen de 2 van Flatland. Als A. Square aan de bol vraagt of er misschien zelfs meer bestaan dan de 3 waar de bol vandaan komt, wordt deze boos en stopt hem weer terug in zijn tweedimensionale wereld.
Flatland wordt nog steeds uitgegeven.

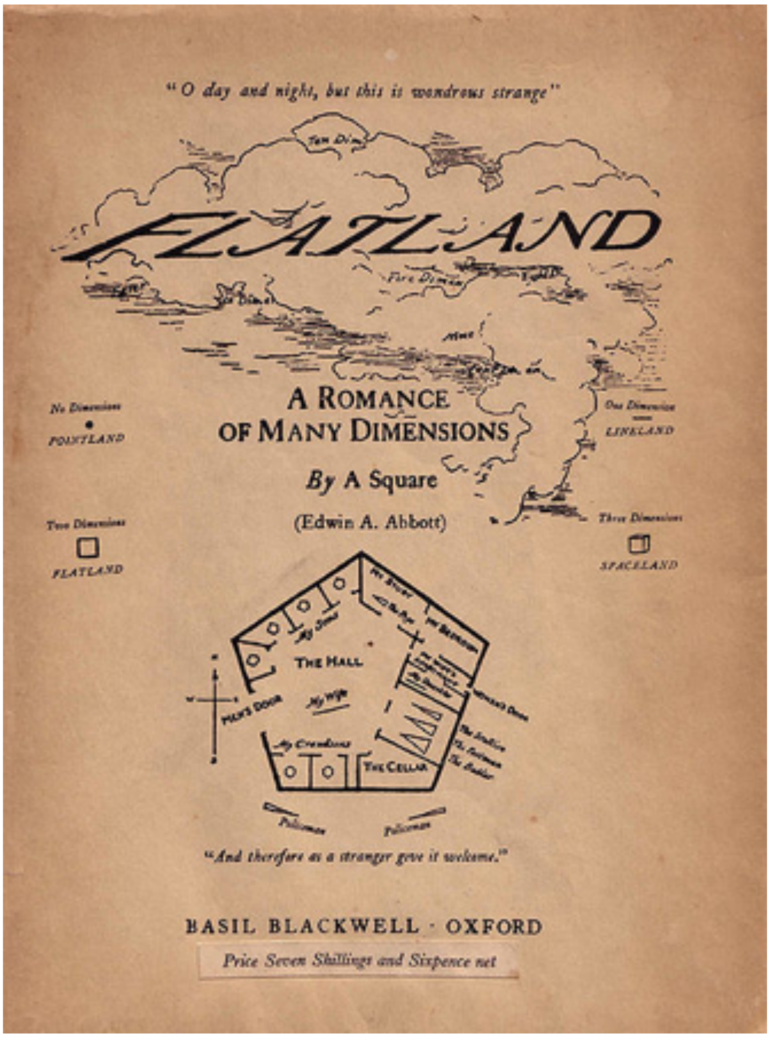
24 Stel jezelf voor als inwoner van Platland (jij bent bijvoorbeeld Een Vierkant):

a Hoe zien voor jou op afstand Een Driehoek, Een Vierhoek en Een Vijfhoek er uit?

b Onderzoek in het boek (http://akoele.home.xs4all.nl/Platland.pdf) welke drie manieren de inwoners van Platland gebruiken om elkaar te kunnen herkennen.

c Op een gegeven moment komt Een Bol in Platland op bezoek. Op welke manier kan Een Bol zich in Platland "laten zien"?

d Als je als Een vierkant binnen Een Cirkel woont, kun je dan als inwoner van Platland ontsnappen? En hoe zit dat als jullie beiden in onze driedimensionale wereld zouden wonen.



Anecdote: The Big Bang Theory

In een aflevering van “The Big Bang Theory” die begin 2013 werd uitgezonden op de Nederlandse televisie probeerde een dronken dr. Sheldon Cooper aan zijn publiek uit te leggen dat het in een vierdimensionale wereld prima mogelijk zou zijn om je broek over je hoofd uit te trekken.....:

“Can I take my pants off over my head? Of course not, my body is in the way. But, if we had access to higher dimensions we could move our pants around our bodies through the fourth dimension and our days of dropping trousers would be over”.

Zie ook: http://youtu.be/DP9pkMPRRG8

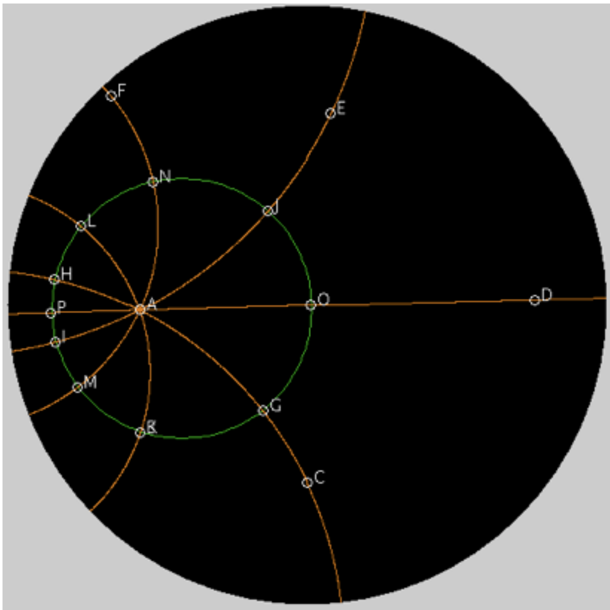
3 Hyperbolische meetkunde

Wat kunnen we ons daar nu bij voorstellen?

3.1 DE POINCARÉ-SCHIJF

Wat kunnen we ons daar nu bij voorstellen?

Het is de Franse wiskundige Poincaré (1854-1912) geweest die als een van de eersten een model heeft ontwikkeld om de hyperbolische ruimte mee te kunnen beschrijven: De Poincaré-schijf.



Open het programma NonEuclid.jar, je ziet een grote zwarte cirkel: de Poincaré-schijf. Zo'n cirkel (schijf) bestaat uit de rand en een binnengebied. Het binnengebied (de rand dus niet meegerekend!) bevat de totale oneindige hyperbolische ruimte! De rand kun je voorstellen als de horizon in het model.

Verder zie je in de cirkel 5 rechte lijnen die elkaar allemaal snijden in het punt *A*. Punt *A* is ook het middelpunt van de groene cirkel.

"Maar wacht", zul je zeggen, die lijnen lijken helemaal niet recht en ze stoppen aan de rand. En punt *A* ligt helemaal niet in het midden van de groene cirkel.

Maar dat komt omdat je naar dit model kijkt vanuit je eigen Euclidische ruimte.

Als je op de een of andere manier in het model zou kunnen kruipen, net zoals Een Vierkant door Een Bol werd meegenomen naar Lijnland en Puntland, dan zouden de lijnen wel degelijk recht lijken en oneindig lang en punt *A* zou wel degelijk even ver van alle punten op de groene cirkel liggen.

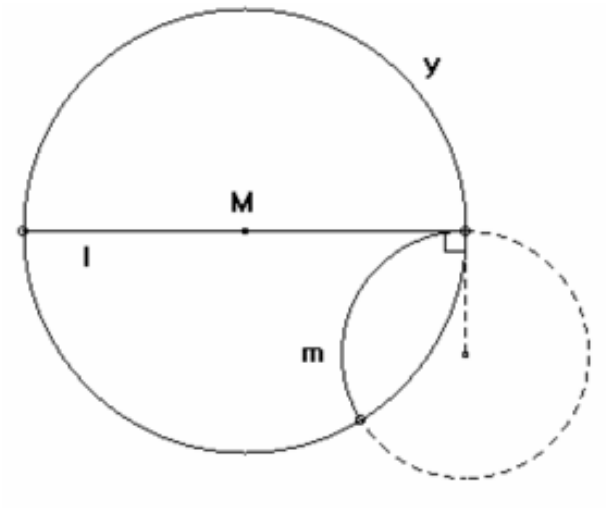
25 Je kunt de punten *A*, *B* en *C* bewegen met je muis. Doe dat en kijk naar het effect.

a Probeer een aantal regels van het model te ontdekken en schrijf deze op.

Verberg vervolgens (delen) van de figuur.

b Voeg lijnen, lijnstukken, cirkels, enz. toe en creëer je eigen hyperbolische tekening. Neem deze op in je verslag.

De volgende afspraken gelden binnen de Poincaré-schijf:



- Punten worden gepresenteerd door punten binnen de Euclidische cirkel γ.
- Lijnen worden gepresenteerd door:
  - Open cirkelbogen (zoals *m* in de afbeelding hiernaast) die de cirkel γ loodrecht snijden.
  - Open middellijnen (zoals *l* in de afbeelding) van cirkel γ, waarbij je de middellijnen kunt opvatten als een boog van een cirkel met een straal die oneindig door loopt.
- Hoeken in een punt van twee snijdende lijnen zijn de hoeken aan de raaklijnen van de twee snijdende cirkelbogen.
- Afstand is gedefinieerd door een bepaalde formule. Het voert te ver om deze formule hier verder uit te leggen. Wat je wel moet weten: rondom het middelpunt *M* van de Poincaré-schijf komt dit afstandsbegrip aardig overeen met ons Euclidisch afstandsbegrip. Naar de rand toe worden de afstanden steeds groter.

Open het Geogebra bestand Geogebra-HM.ggb. Met dit bestand kun je hyperbolische constructies uitvoeren.

Je zult daarbij vooral de knoppen zoals rechts afgebeeld gebruiken. Vergeet niet je resultaten regelmatig op te slaan en uiteindelijk het resultaat op te nemen in je verslag. Doe dat voordat je het bestand afsluit. Door een bug in het programma wordt een eerder opgeslagen bestand als het opnieuw wordt geopend soms namelijk niet goed weergegeven.

26 **a** Teken twee punten *B* en *C* en de lijn door deze twee punten. Kies een punt *D* buiten de lijn door *B* en *C* en construeer de lijn door *D*, loodrecht op *BC*. Noem het snijpunt van deze loodlijn met *BC*: *E*. Doe hetzelfde voor een punt *F* buiten de lijn door *B* en *C* en noem het snijpunt van deze loodlijn met *BC*: *F*.

Meet de hoeken met je geodriehoek. Zijn ze ook daadwerkelijk $90°$? Neem de resulterende tekening op in je verslag.

b Teken een driehoek *KLM* en probeer, door te schuiven met de punten *K*, *L* en *M* de hoekensom zo groot mogelijk te maken. Meet de hoekensom, hoe groot is deze?

c Teken een driehoek *PQR* en probeer, door te schuiven met de punten *P*, *Q* en *R* de hoekensom zo klein mogelijk te maken. Meet de hoekensom, hoe groot is deze? Neem de resulterende tekening (onderdelen b en c) op in je verslag.

d Wat valt je op aan de locatie van de punten *K, L, M, P, Q* en *R* binnen de Poincaré-schijf?

e Formuleer een algemene uitspraak over de hoekensom van een driehoek binnen de hyperbolische meetkunde.

27 **a** Teken opnieuw twee punten *B* en *C* en de lijn door deze twee punten. Verschuif de punten *B* en *C* zo dat de afstand tussen *B* en *C* zo groot mogelijk wordt. Hoe groot kun je de afstand tussen *B* en *C* maken? (door de beperkingen van het programma lukt het niet om deze afstand oneindig groot (∞) te maken.)

b Open een nieuw bestand en teken een lijnstuk *AB* met een lengte van (ongeveer) 7,5. Kun je verklaren waarom dit ook met je Euclidische oog een recht lijnstuk is?
Teken vervolgens de lijnstukken *AC, AD, ..., AM, AN, AO* en *AP* die steeds (ongeveer) 0,5 korter zijn. Hoe zie je dat naar de rand toe de afstand tussen twee punten steeds groter wordt? En hoe zie je dat naar het midden toe het afstandsbegrip meer op ons Euclidisch afstandsbegrip lijkt? Neem de resulterende tekening op in je verslag.

28 Teken een cirkel met middelpunt *A* en straal 1. Kies vervolgens een middelpunt *C* dicht bij de rand en teken ook hier een cirkel met straal 1. Zien de cirkels er uit als gewone Euclidische cirkels? Wat zijn de verschillen tussen de cirkels?

Neem de resulterende tekening op in je verslag.

29 **a** Teken de lijn *BC* en kies een punt *D* buiten deze lijn. Construeer een lijn *DE* evenwijdig aan lijn *BC* (de lijn *DE* snijdt de lijn *BD* dus niet). Verschuif vervolgens het punt *E* zover als mogelijk in de richting van punt *B*, zonder dat lijnen *DE* en *BC* elkaar snijden.

b Construeer een tweede lijn *DF* evenwijdig aan lijn *BC*. Verschuif vervolgens het punt *F* zover als mogelijk in de richting van punt *C*, zonder dat lijnen *DE* en *BC* elkaar snijden.

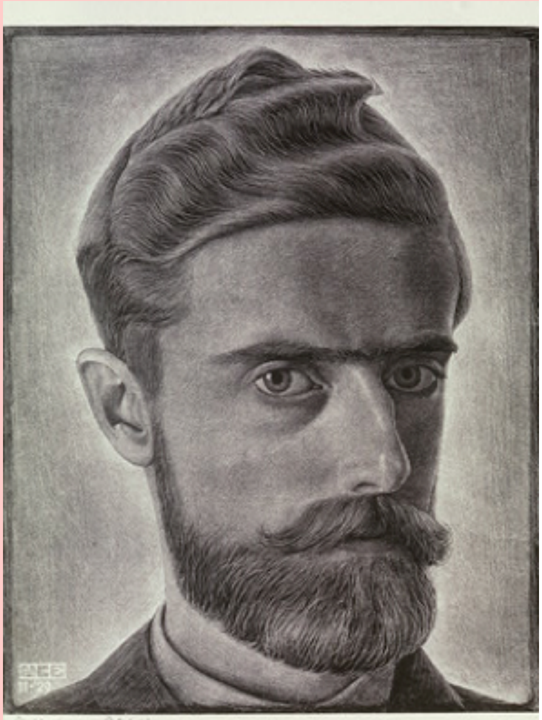
c Construeer nog enkele lijnen door *D* die de lijn *BC* niet snijden. Neem de resulterende tekening op in je verslag.

d Hoeveel van dergelijke lijnen kun je maken? Wat is daarbij bijzonder aan de lijnen door *DE* en *DF*?

3.2 DE WERELD VAN ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) is een van 's werelds meest beroemde grafici. Zijn kunst wordt bewonderd door miljoenen mensen over de hele wereld.

Hij werd geboren in Leeuwarden als vierde en jongste zoon. Na 5 jaar verhuisde de familie naar Arnhem, waar hij het grootste deel van zijn jeugd doorbracht. Op school blonk hij uit in tekenen maar zijn overige cijfers waren slecht waardoor hij zakte voor zijn eindexamen. Na een kort intermezzo in Delft, begon Escher met zijn lessen bouwkunde aan de School voor Bouwkunde en Sierende Kunsten in Haarlem. Daar stopte hij echter na enkele weken al mee om zich vervolgens volledig toe te leggen op de grafische kunst.



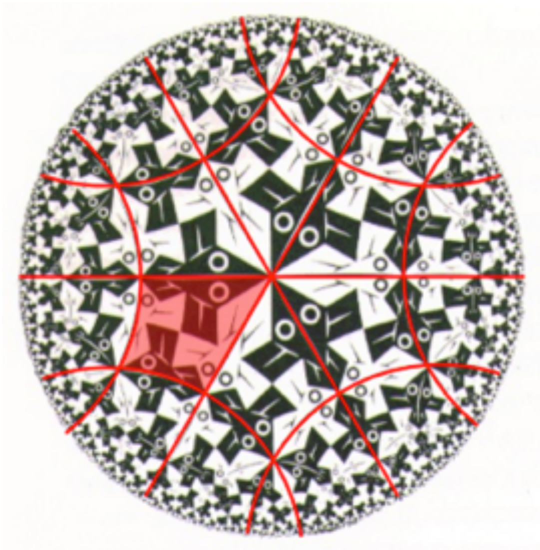
Zelfportret van Escher

M.C. Escher werd gefascineerd door de regelmatige geometrische figuren van de wand -en vloermozaïken in het Alhambra, een veertiende-eeuws kasteel in Granada, Spanje, dat hij in 1922 bezocht.

Tijdens zijn jaren in Zwitserland en gedurende de hele Tweede Wereldoorlog werkte hij met veel energie aan zijn hobby. Hij maakte toen 62 van de in totaal 137 symmetrische tekeningen die hij zijn leven zou maken. Hij breidde zijn hobby ook uit, door deze symmetrische tekeningen te gebruiken voor het snijden van houten bollen.

Hij speelde met architectuur, perspectief en onmogelijke ruimtes. Zijn kunst blijft miljoenen mensen over de hele wereld verbazen en in verwondering brengen. In zijn werk herkennen wij zijn uitstekende observatie van de wereld om ons heen en de uitdrukking van zijn eigen fantasie. M.C. Escher laat ons zien dat de werkelijkheid wonderlijk, begrijpelijk en fascinerend is.

30 Het werk cirkellimiet I is door Escher in 1958 gemaakt. Hij heeft hierbij volop gebruik gemaakt van de inzichten uit de hyperbolische meetkunde. Of hij zich daar zelf van bewust was blijft echter de vraag. Een kopie van de tekening vind je op het werkblad.


Cirkellimiet I

a Je ziet in cirkellimiet I twee soorten lijnen. Beschrijf ze en teken meer lijnen door de ruggengraten van andere rijen vissen te volgen.

b In de figuur zie je vierhoeken en ook een regelmatige zeshoek. Meet de hoeken op en vergelijk de hoekensom met de overeenkomstige hoekensom in de Euclidische meetkunde.

c De figuur is draaisymmetrisch. Wat is de draaihoek?

31 Op het werkblad is ook het werk Cirkellimiet III opgenomen, dat door Escher is gemaakt in 1959.

a Kijk naar een driehoek en bepaal de grootte van een hoek door te kijken naar het aantal lijnen dat samenkomt in een hoekpunt. Neem aan dat alle hoeken die samenkomen in dat hoekpunt even groot zijn (dit is ook zo, maar de vervorming maakt dit moeilijk te geloven).

b Wat is de hoekensom van de driehoek, is dat mogelijk in hyperbolische meetkunde?

c Kijk naar de witte lijnen en meet onder welke hoek ze de rand van de schijf snijden (gebruik het werkblad). Wat is je conclusie?

32 Ook Geogebra kent mogelijkheden om Escher-achtige tekeningen te maken.

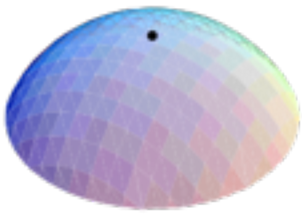
a Open opnieuw Geogebra en maak de schuifknoppen *m* en *n* zichtbaar door in het algebravenster links met de rechtermuisknop op *m* (en daarna *n*) te klikken en te kiezen voor “object tonen”. Kies vervolgens onder de knop voor “Tilling” en volg de instructies.

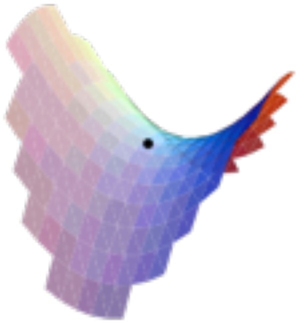
Door de waarden van *m* en *n* te veranderen kun je het resulterende patroon veranderen. Experimenteer hiermee totdat je een “mooi” figuur hebt en neem dat op in je verslag. Zet er bij welke waarde je daarbij voor *n* en *m* je hebt gebruikt.

b Open Geogebra opnieuw en maak nu zelf een mooie vlakvulling. Neem deze op in je verslag.

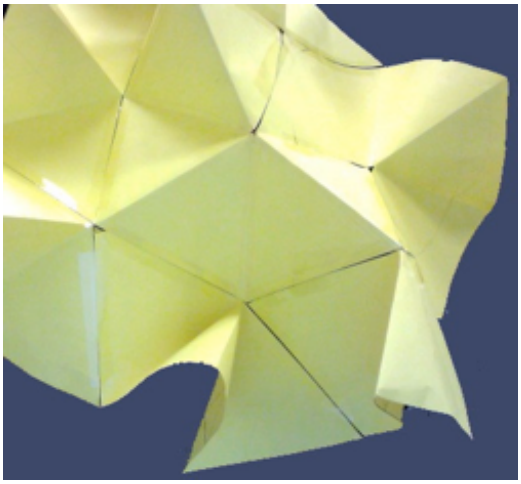
3.3 EEN NATUURLIJK MODEL VOOR DE HYPERBOLISCHE RUIMTE

Op een bol lijkt de omgeving van een punt op een kapje, in de hyperbolische ruimte lijkt de omgeving van een punt op een zadel:



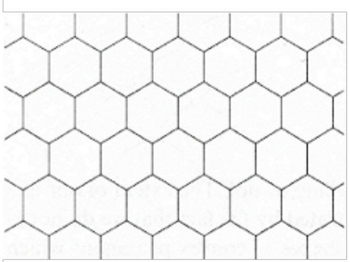
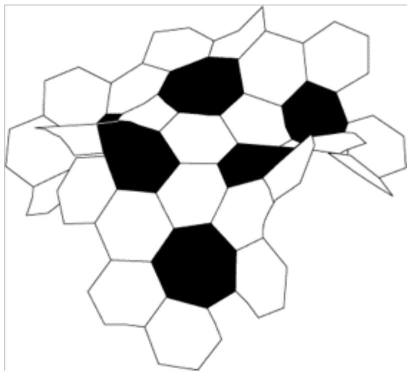


Kapjes kun je “aan elkaar plakken”, totdat je uiteindelijk een bol hebt. Helaas lukt dat niet met zadels. Als je dat probeert, bijvoorbeeld met papier, dan merk je op een gegeven moment dat je te weinig ruimte hebt om al die zadels in te stoppen. De benodigde ruimte neemt exponentieel toe en explodeert als het ware. De hele hyperbolische ruimte, zoals we al eerder hebben aangegeven, past simpelweg niet in onze driedimensionale wereld.



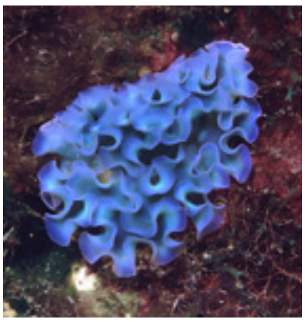
Een andere manier om je dit voor te stellen is met zeshoeken:

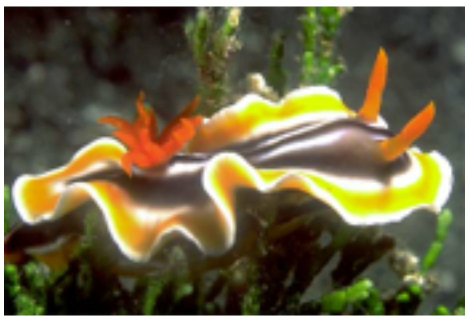
- Als je die combineert met vijfhoeken dan krijg je een voetbal: onze elliptische meetkunde;
- Als je uitsluitend zeshoeken gebruikt dan krijg je een plat vlak: onze Euclidische meetkunde;
- Als je ze combineert met zevenhoeken dan opent het model zich, explodeert de ruimte en past het niet meer: de hyperbolische ruimte.

Zoals je hierboven hebt gezien is het dus wel mogelijk
een deel van de hyperbolische ruimte in onze driedimensionale wereld voor te stellen. Het zadel hierboven beschrijft perfect de hyperbolische ruimte rondom een punt, en als we een aantal van die zadels aan elkaar plakken dan kunnen we ons in ieder geval een deel van de hyperbolische ruimte voorstellen.

En ook onze natuur gedraagt zich soms zo: koraalrif maar bijvoorbeeld ook slablaadjes zijn goede voorbeelden van hyperbolische oppervlakken, het is een bijzonder efficiënte manier om veel contactoppervlak met de buitenwereld te creëren.





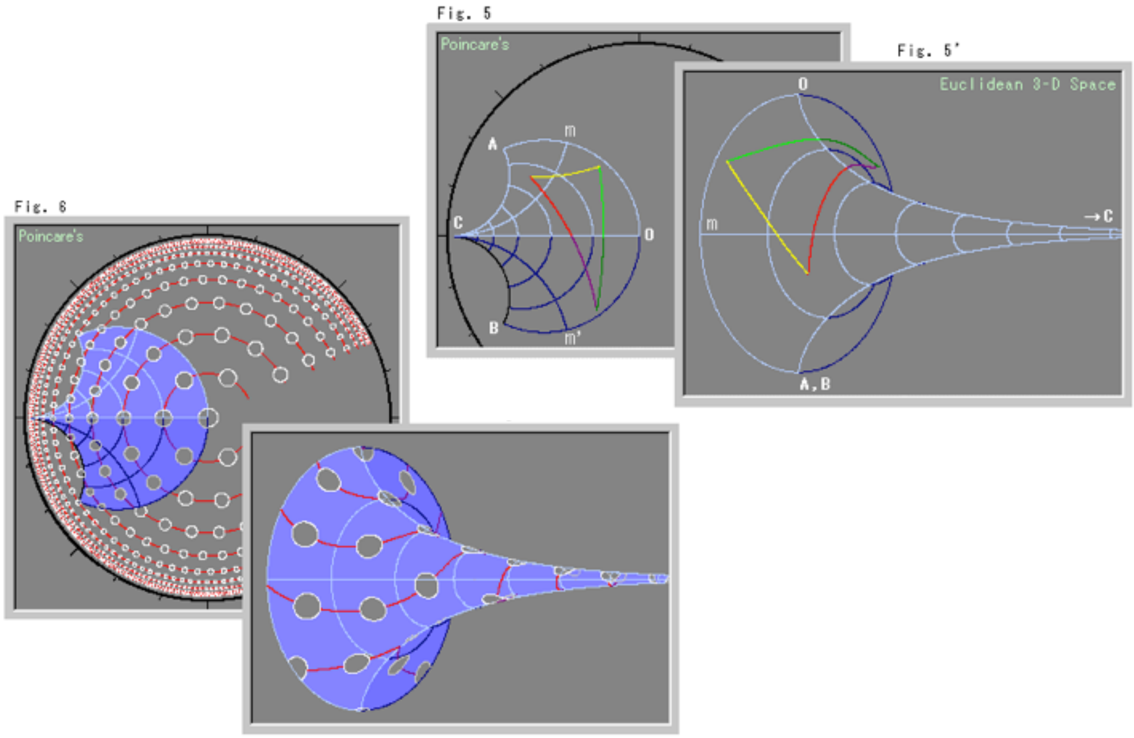
De mens gebruikt de vorm ook: constructies met een hyperbolische vorm zijn efficiënt te maken.

Hierboven zie je bv. het Mc-Donnell planetarium in Saint Louis. Een dergelijke vorm noemen we een pseudosphere.

33 Ga zelf ook op zoek naar hyperbolische vormen: in de natuur en geconstrueerd door de mens. Neem een aantal voorbeelden op in je verslag.

Informatief: Poincaré en de pseudo-sphere

Ook vanuit de Poincaré schijf is een pseudo-sphere te maken, kijk naar de figuren hieronder.
Stel je voor dat de bijna-cirkel links in de Poincaré-schijf gemaakt is van extreem flexibel materiaal. De afstand CO is oneindig en daarom trekken we punt C oneindig ver omhoog. AC en BC worden daarbij aan elkaar gelijmd. Het resultaat is de getoonde pseudo-sphere rechts. Op de pseudo-sphere zijn de afstanden nu wel echt Euclidisch te meten.



Een andere manier om ons de hyperbolische ruimte voor te stellen is door middel van haken. Deze methode is eind jaren negentig ontwikkeld door professor Daina Taimina van Cornell University. Hiernaast zie je een gehaakt voorbeeld van een hyperbolisch oppervlak. Hierbij laat je de ruimte “exploderen” door met een bepaalde exponentiële factor per toer je haakwerk te laten groeien. Vergelijk dit werk maar eens met het koraal enkele pagina’s terug.

Het mooie van Taimina's methode is dat veel van de eigenschappen van de hyperbolische ruimte nu zichtbaar worden voor het oog en direct ervaren kunnen worden door te spelen met de modellen. Zo kun je rechte lijnen in je model naaien. En hoewel de lijnen hieronder "krom" lijken kun je laten zien dat ze recht zijn, simpelweg door je model langs de lijn te vouwen, net zoals bij de elliptische meetkunde. Ook zie je hieronder een voorbeeld waarbij drie rechte lijnen door een punt buiten een gegeven lijn die gegeven lijn nergens snijden.

Informatief: Exponentiële expansie en haken

Bij het haken vertaalt de exponentiele groei zich in een constante ratio waarmee je je werk per toer laat groeien. Zo kun je er bv. voor kiezen iedere derde steek een extra steek te maken: 3 steken worden er dus 4, de ratio is 3:4.

Als je eerste toer dan bestaat uit 10 steken dan groeit je werk als volgt:
10 – 13 – 18 – 24 – 32 – 42 – 56 – 75 – 100 – 133 – 178 ....
Voor een goed resultaat moet je daarbij de extra steken goed over je werk verdelen.

Dat is een heel gepuzzel en getel. Je kunt overwegen het op papier uit te werken of een excel sheet te maken om je te helpen.

34 **a** Verklaar de hierboven gegeven reeks van getallen.

b Stel een formule op voor het aantal steken in de N-de toer bij een ratio 3:4 als je met 10 steken begint.

35 Bestudeer:

- De Youtube-film “Margaret Wertheim - The beautiful math of coral (and crochet)”
- De hyperbolic spce online exhibit van het Institute for Figuring op http://www.theiff.org/oexhibits/oe1.html
- Het boek Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes van Dana Taimina

en doe ideeën op voor hyperbolische oppervlakken die je zelf gaat haken. Lever het voorstel in bij je docent.

36 Leer haken, bijvoorbeeld via Youtube: http://youtu.be/FvTbYgI4W2c en maak een proeflapje van 20x20 dat je inlevert bij je docent.

37 Haak je eigen niet vlakke cikel en kies voor een constante vermeerdering.

a Ga na of het vijfde postulaat van Euclides geldt.

b In de Euclidische ruimte geldt $\frac{O}{d}=\pi$. Hoe groot is hier $\frac{O}{d}$?

c Welke vorm hebben de kortste verbindingen tussen twee punten?

d Hoe groot is de hoekensom van een driehoek?

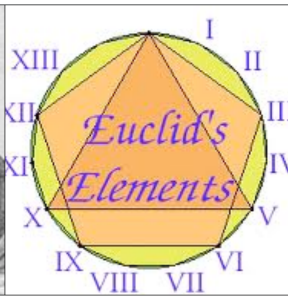
e Lever je bevindingen, inclusief het haakwerk, in bij je docent.

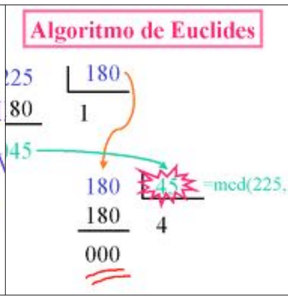
38 Haak het (de) door jou voorgestelde hyperbolische oppervlak(ken) (opgave 35) en onderzoek een aantal eigenschappen van de hyperbolische ruimte met behulp van jouw haakwerk. Levert het resultaat (haakwerk en berekeningen, conclusies) in als eindwerk van deze module. Denk aan de volgende aspecten:

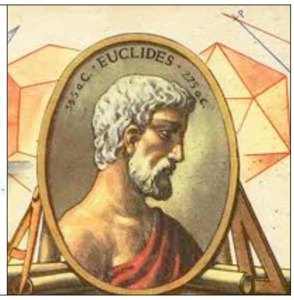
- Het 5de postulaat, en evenwijdigheid
- De kortste verbinding tussen twee punten
- Een driehoek, met de hoekensom
- Een vierhoek, met de hoekensom
- Verklaar de soort groei, extrapoleer
- Bereken O:d voor de eerste 10 toeren
- Zou je 20 toeren kunnen maken? Hoe ziet dat oppervlak eruit?

Bijlage 1: definities, algemene inzichten, postulaten en proposities van Euclides

DEFINITIES





Definitie: Een nauwkeurige omschrijving van een begrip

1. Een punt is wat geen deel heeft.
2. Een lijn is een breedteloze lengte.
3. De uiteinden van een lijn zijn punten.
4. Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop.
5. Een vlak is, wat alleen lengte en breedte heeft.
6. De uiteinden van een vlak zijn lijnen.
7. Een plat vlak is een vlak dat gelijk ligt met de rechte lijnen erop.
8. Een vlakke hoek is de helling tot elkaar van twee lijnen in een plat vlak, die elkaar ontmoeten en niet op een rechte liggen.
9. Wanneer de lijnen die den hoek bevatten, rechte zijn, dan heet de hoek rechtlijnig
10. Wanneer een rechte, op een rechte staande, de aan elkaar grenzende hoeken aan elkaar gelijk maakt, is elk der gelijke hoeken recht en de opstaande lijn heet de loodlijn, op die waarop ze staat.
11. Een stompe hoek is een hoek die groter is dan een rechte hoek.
12. Een scherpe hoek is een hoek die kleiner is dan een rechte.
13. Een grens is, wat ergens het einde van is.
14. Een figuur is, wat omvat wordt door enige grenzen.

15. Een cirkel is een vlakke figuur, omvat door een lijn, zodanig dat alle rechten die van éen der binnen deze figuur gelegen punten tot deze lijn neerdalen, gelijk zijn.
16. Middelpunt van den cirkel heet het punt.
17. Een middellijn van den cirkel is een rechte lijn, getrokken door het middelpunt en naar de beide zijden beëindigd door den omtrek van den cirkel, welke ook den cirkel middendoor deelt.
18. Een halve cirkel is de figuur omvat door den middellijn en den omtrek die erdoor afgesneden wordt. En het middelpunt van de halve cirkel is hetzelfde als dat van de cirkel.
19. Rechtlijnige figuren zijn die welke omvat worden door rechte lijnen; driezijdige figuren zijn die welke worden omvat door drie, vierzijdige figuren worden zijn die welke worden omvat door vier, en veelzijdige figuren zijn die welke worden omvat door meer dan vier rechte lijnen.
20. Van driezijdige figuren is een gelijkzijdige driehoek die waarvan de drie zijden gelijk zijn; een gelijkbenige die waarvan slechts twee zijden gelijk zijn; en een willekeurige driehoek is die waarvan geen zijde gelijk is aan een andere.
21. Verder, van driezijdige figuren is een rechthoekige driehoek die welk een rechte hoek heeft, een stomphoekige driehoek die een stompe hoek heeft, en een scherphoekige driehoek die waarvan de drie hoeken scherp zijn.
22. Van vierzijdige figuren is een vierkant een figuur die gelijkzijdig en rechthoekig is, een rechthoek die niet gelijkzijdig maar wel rechthoekig is; een ruit die gelijkzijdig maar niet rechthoekig is; een parallellogram die waarvan de overstaande zijden en hoeken aan elkaar gelijk zijn, maar niet gelijkzijdig en niet rechthoekig. En alle andere vierhoeken heten trapezium.
23. Parallel zijn lijnen, die in hetzelfde platte vlak gelegen en naar weerszijden tot in het oneindige verlengd, naar geen van beide zijden elkaar ontmoeten.

ALGEMENE INZICHTEN

Algemene inzichten: Vanzelfsprekendheden die nodig zijn om de juistheid van zaken te kunnen bewijzen.

1. Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook aan elkaar gelijk.
2. En als men bij gelijke dingen gelijke voegt, zijn de totalen gelijk.
3. En als men van gelijke dingen gelijke afneemt, zijn de resten gelijk.
4. En dingen die op elkaar passen zijn gelijk.
5. En het geheel is groter dan het deel.

POSTULATEN

Postulaat: een niet bewezen maar als grondslag aanvaarde bewering

1. Laat geëist zijn van elk punt naar elk punt een rechte lijn (een lijnstuk) te trekken (en wel precies één).
2. En laat geëist zijn een beëindigde rechte samenhangend in een rechte lijn te verlengen (een lijnstuk verlengd tot een lijn).
3. En laat geëist zijn dat met elk middelpunt en elke afstand (bedoeld is de straal vastgelegd als een lijnstuk) een cirkel beschreven wordt.
4. En laat geëist zijn dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.
5. En laat geëist zijn dat, als een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant, waar de hoeken kleiner zijn dan twee rechte hoeken.

PROPOSITIES

Propositie: een stelling die wordt bewezen, gebruikmakend van de definities, algemene inzichten, postulaten en eerder bewezen stellingen.

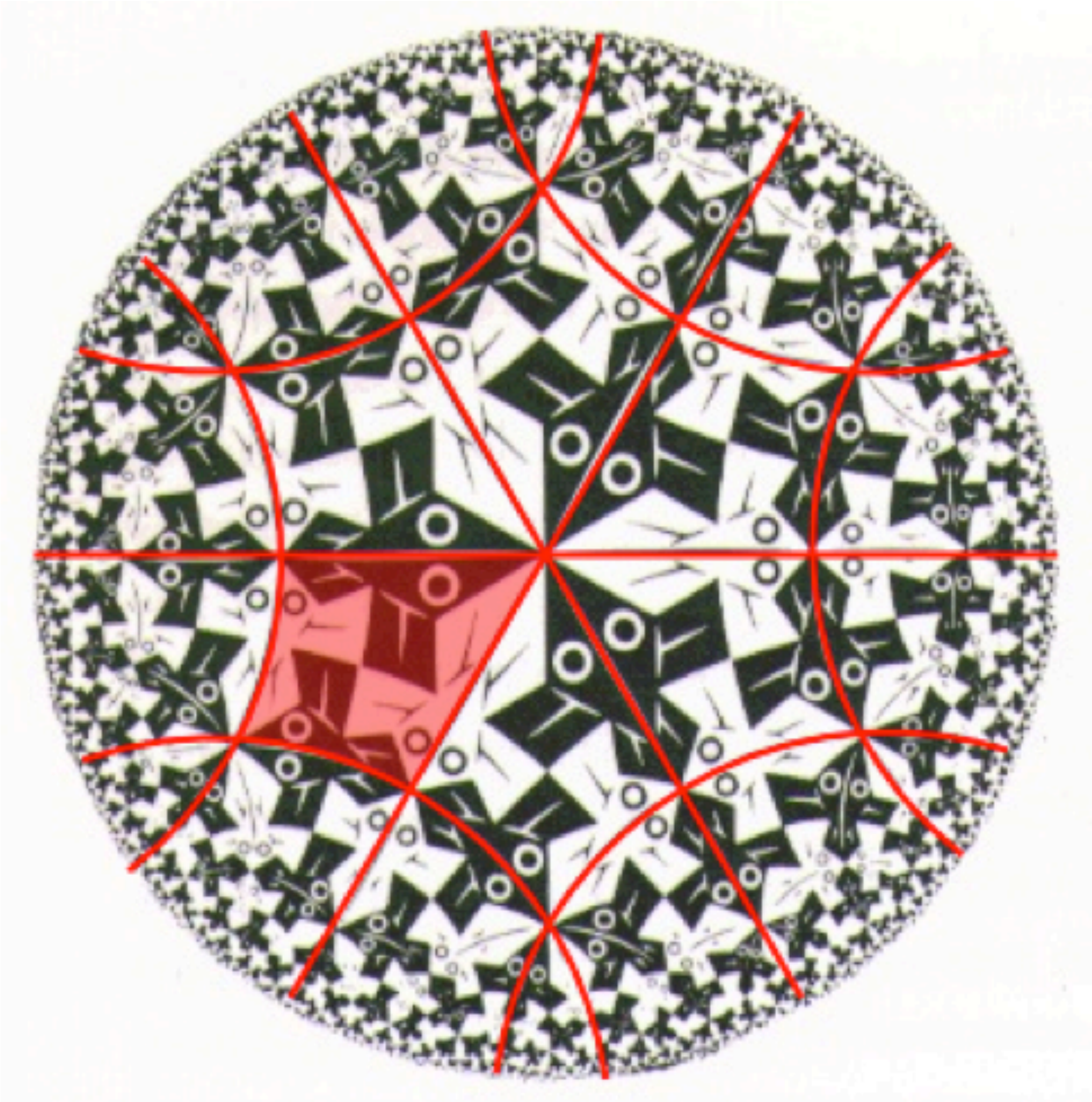
1. Op een gegeven lijnstuk is het mogelijk een gelijkzijdige driehoek te construeren.
2. Gegeven een lijnstuk en een punt niet op dat lijnstuk. Dan is het mogelijk een even lang lijnstuk te construeren dat dit punt als een van de eindpunten heeft.
3. Gegeven twee lijnstukken van ongelijke lengte. Dan is het mogelijk van het langste lijnstuk een deel af te passen dat even lang is als het kortste.
4. Gegeven twee driehoeken waarbij twee zijden van de ene driehoek even lang zijn als twee zijden van de andere driehoek en waarbij de hoek gevormd door die twee zijden in beide driehoeken even groot is. Dan hebben beide driehoeken gelijke zijden, gelijke hoeken en de driehoeken zijn gelijk aan elkaar (congruent, ZHZ).
5. In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken aan elkaar gelijk. Als de gelijke benen tot onder de basis worden verlengd, dan zijn de hoeken onder de basis ook gelijk aan elkaar.
6. Als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, dan is het een gelijkbenige driehoek.
7. Als op een gegeven lijnstuk twee driehoeken worden gecreëerd waarbij de twee opstaande zijden van de ene driehoek even lang zijn als de opstaande zijden van de andere driehoek, dan vallen die twee driehoeken samen.
8. Gegeven twee driehoeken waarbij twee zijden van de ene driehoek even lang zijn als twee zijden van de andere driehoek en ook de bases van beide driehoeken even lang zijn. Dan zijn de hoeken gevormd door die twee zijden in beide driehoeken even groot en de driehoeken zijn gelijk aan elkaar (congruent, ZZZ).
9. Het is mogelijk een gegeven hoek doormidden te delen.
10. Het is mogelijk een gegeven lijnstuk doormidden te delen.
11. Gegeven een lijn en een punt op die lijn, dan is het mogelijk een loodlijn op die lijn door dat punt te construeren.
12. Gegeven een lijn en een punt niet op die lijn, dan is het mogelijk een loodlijn op die lijn door dat punt te construeren.
13. Gegeven een lijnstuk op een lijn. Dan zijn de aan elkaar grenzende hoeken beide recht (90°) of de som van die twee hoeken is gelijk aan twee rechten (180°).
    (Euclides kent het begrip gestrekte hoek niet, vandaar deze formulering).

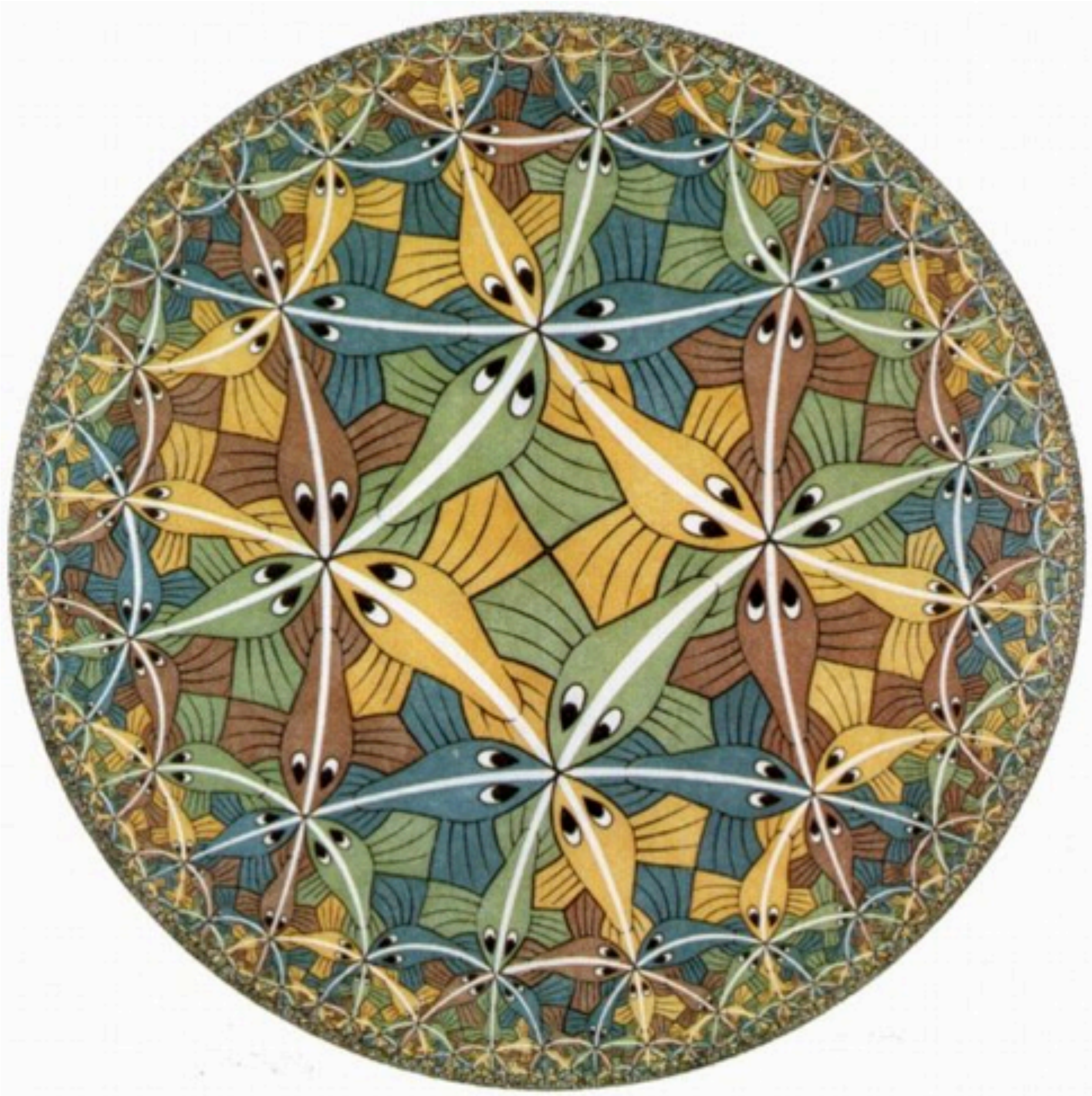
14. Gegeven twee lijnstukken die een eindpunt gemeen hebben en niet samenvallen. Als deze twee lijnstukken een gestrekte hoek maken met elkaar dan liggen deze twee lijnstukken op dezelfde rechte lijn.
15. Gegeven twee lijnen die elkaar snijden. Dan zijn de overstaande hoeken aan elkaar gelijk (X-hoeken).
16. * In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) groter dan elke niet-aanliggende binnenhoek.
17. Twee hoeken van een driehoek zijn samen altijd minder dan 180°.
18. In iedere driehoek is de hoek tegenover de langste zijde de grootste hoek.
19. In iedere driehoek is de zijde tegenover de grootste hoek de langste zijde.
20. In iedere driehoek is de som van de lengtes van twee zijden groter dan de lengte van de derde zijde.
21. Als op de basis van een driehoek een tweede driehoek wordt opgericht waarvan de zijden binnen de eerste driehoek vallen dan is de som van de lengte van die twee zijden kleiner dan de som van de lengtes van de twee zijden in de eerste driehoek. De hoek die door die twee zijden in de tweede driehoek wordt gevormd is groter dan de hoek die door de twee zijden in de eerste driehoek wordt gevormd.
22. Gegeven drie lijnstukken waarbij de som van de lengte van twee van die lijnstukken steeds groter is dan de lengte van het derde lijnstuk. Dan is het mogelijk een driehoek te construeren waarvan de lengtes van de zijden overeenkomen met de lengtes van die drie lijnstukken.
23. Gegeven een zekere hoek ($<180^\circ$). Gegeven een lijn en een punt op die lijn. Dan is het mogelijk een driehoek te construeren waarvan de basis op die lijn ligt, een hoekpunt samenvalt met het gegeven punt en de tophoek even groot is als de gegeven hoek.
24. Gegeven twee driehoeken waarbij twee zijden van de ene driehoek even lang zijn als twee zijden van de andere driehoek. Als de hoek die de twee zijden in de ene driehoek vormen groter is dan de hoek die de twee zijden in de andere driehoek vormen, dan is de basis in de ene driehoek langer dan de basis in de andere driehoek.
25. Gegeven twee driehoeken waarbij twee zijden van de ene driehoek even lang zijn als twee zijden van de andere driehoek. Als de basis in de ene driehoek langer is dan de basis in de andere driehoek, dan is de tophoek in de ene driehoek groter dan de tophoek in de andere driehoek.
26. Gegeven twee driehoeken waarvan een zijde en twee hoeken even groot zijn. Dan hebben beide driehoeken gelijke zijden, gelijke hoeken en de driehoeken zijn gelijk aan elkaar (congruent, ZHH, HZH).
27. Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn waarbij er een paar gelijke Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.

28. Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn waarbij er een paar gelijke F-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.
29. ** Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn dan zijn de Z-hoeken en F-hoeken aan elkaar gelijk.
30. Als twee lijnen ieder evenwijdig zijn aan een derde lijn dan zijn ze ook onderling evenwijdig.
31. Door een gegeven punt buiten een lijn gaat een (precies één) lijn die evenwijdig is aan die lijn. (de toevoeging "precies één" is niet van Euclides maar valt te bewijzen m.b.v. de vorige proposities).
32. In een driehoek is de buitenhoek (de hoek tussen een zijde en het verlengde van een andere zijde) gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken en de hoeken van een driehoek zijn samen gelijk aan 180°.
33. Als twee lijnstukken even lang en evenwijdig zijn dan zijn de twee lijnstukken die ontstaan door de eindpunten "niet-kruisend" met elkaar te verbinden even lang en evenwijdig.
34. In een parallellogram zijn tegenover elkaar liggen zijden en hoeken even groot en de diagonaal verdeelt de oppervlakte in twee gelijke delen.
35. Als twee parallellogrammen dezelfde basis hebben en de tegenoverliggende zijde ligt op dezelfde lijn, dan hebben ze dezelfde oppervlakte.
36. Als twee parallellogrammen een basis hebben die op dezelfde lijn ligt en even lang is en als ook de tegenoverliggende zijde op dezelfde lijn ligt, dan hebben ze dezelfde oppervlakte.
37. Twee driehoeken met dezelfde basis en gelijke hoogte hebben dezelfde oppervlakte.
38. Als twee driehoeken een basis hebben die op dezelfde lijn ligt en even lang is en als ze ook gelijke hoogte hebben, dan hebben ze dezelfde oppervlakte.
39. Als twee driehoeken dezelfde basis hebben en dezelfde oppervlakte dan hebben ze gelijke hoogte.
40. Als twee driehoeken een basis hebben die op dezelfde lijn ligt en even lang is en als ze ook dezelfde oppervlakte hebben, dan hebben ze gelijke hoogte.
41. Als een parallellogram en een driehoek dezelfde basis hebben en gelijke hoogte, dan is de oppervlakte van het parallellogram twee keer zo groot als de oppervlakte van de driehoek.
42. Gegeven een driehoek en een hoek. Dan is het mogelijk een parallellogram te construeren waarvan de basis op dezelfde lijn ligt als de basis van de driehoek, waarvan een van de hoeken even groot is als de gegeven hoek, waarvan de hoogte gelijk is aan die van de driehoek en waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van de driehoek.

43. Gegeven een parallellogram, een diagonaal van dat parallellogram en een punt op die diagonaal waardoor twee lijnen getrokken zijn, evenwijdig aan de zijden van het parallellogram. Dan hebben de parallellogrammen die hierdoor aan beide zijden van de diagonaal ontstaan gelijke oppervlakte.
44. Gegeven een driehoek, een hoek en een lijnstuk. Dan is het mogelijk een parallellogram te construeren met dit lijnstuk als basis, de hoek als hoek en een oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van de driehoek.
45. Gegeven een vierhoek en een hoek. Dan is het mogelijk een parallellogram te construeren waarvan een van de hoeken gelijk is aan de gegeven hoek en de oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van de vierhoek.
46. Gegeven een lijnstuk. Dan is het mogelijk een vierkant te construeren met dit lijnstuk als een van de zijden.
47. In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde (stelling van Pythagoras).
48. Als in een driehoek de som van de kwadraten van twee zijden gelijk is aan het kwadraat van de derde zijde, dan maken die twee zijden een rechte hoek met elkaar en is het een rechthoekige driehoek.

Werkbladen





Bronvermelding

- Wikipedia
- Geschiedenis van de niet-euclidische meetkunde, Iris van Gulik-Gulikers, Zebra deel 21, Epsilon Uitgaven
- Euclid's elements, book 1: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html
- De Geometria non-Euclides liber, Pascal Wissink & Jelmer Mulder (pdf document, via internet).
- Henk Hofstede (via http://www.hhofstede.nl/modules/bewijshoeken.htm).
- http://www.petericepudding.com/nem.htm
- http://www.mcescher.nl
- Dr. Anneke Bart, University of Saint Louis (http://euler.slu.edu/escher/index.php/Math_and_the_Art_of_M._C._Escher)
- De pseudo-sphere: http://web1.kcn.jp/hp28ah77/us20_pseu.htm
- Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes, Dana Taimina