Wiskunde D Online – uitwerking opgaven
6 VWO blok 16 Niet-euclidische meetkunde
Les 2

Opgave 12

Als een postulaat *A* gelijkwaardig is met het parallellenpostulaat, dan wil dat zeggen dat uit postulaat *A* het parallellenpostulaat is af te leiden, en andersom, dat uit het parallellenpostulaat postulaat *A* is af te leiden.

Opgave 13

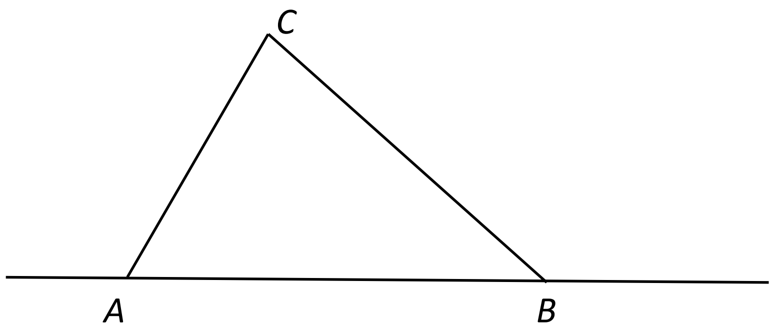
a Er staat een gelijkheid geschreven met daarin de variabele '*x*'. De waarde van de variabele is niet vastgelegd. Voor tenminste een aantal waarden van de variabele is de ongelijkheid onjuist, bijvoorbeeld als voor *x* de waarde 0 wordt gekozen.

b $3x + 5 + 2x = 12 + 4x$
$3x + 2x - 4x = 12 - 5$
$x = 7$

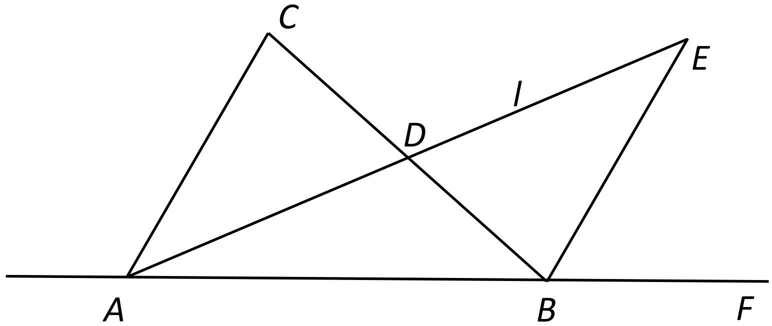
c De gelijkheid is in zijn algemeenheid (voor iedere waarde van *x*) niet waar. Voor precies één waarde van *x*, namelijk $x = 7$ is de gelijkheid wel waar.

Opgave 14

Bewezen moet worden: "In een driehoek is de buitenhoek gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken".
Teken op een lijn door punten *A* en *B* driehoek *ABC*.



Breidt de tekening uit met de volgende constructie:



Deze constructie is als volgt uitgevoerd:
- plaats punt *D* midden op *BC* (propositie 10)
- teken lijn *l* door *A* en *D* (postulaat 1 en 2)
- plaats punt *E* op *l*, zodat *AD* = *DE* (propositie 2).

Dan zijn ΔADC en ΔEDB aan elkaar gelijk (ZHZ, propositie 4). Het gevolg is dat $\angle ACB = \angle CBE$.

Omdat $\angle ACB = \angle CBE$ zijn lijnen *AC* en *BE* parallel (Z-hoek, opgave 9).

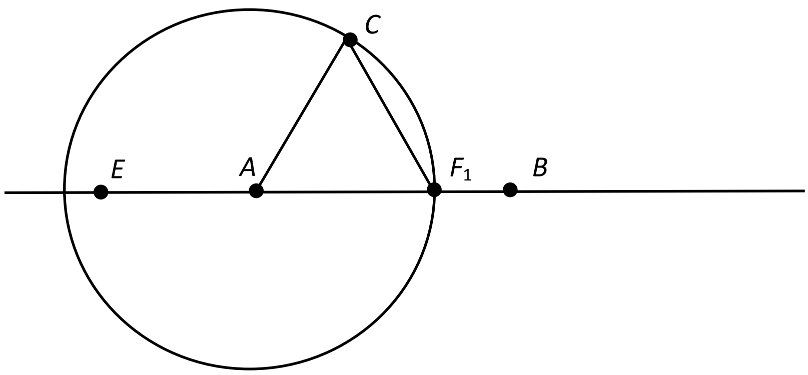
Omdat *AC* en *BE* parallel zijn, zijn $\angle CAB = \angle EBF$ gelijk (F-hoek, opgave 10).

De buitenhoek bij *B* is $\angle CBE + \angle EBF$.

Omdat $\angle CBE = \angle ACB$ en $\angle EBF = \angle CAB$ is de buitenhoek gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

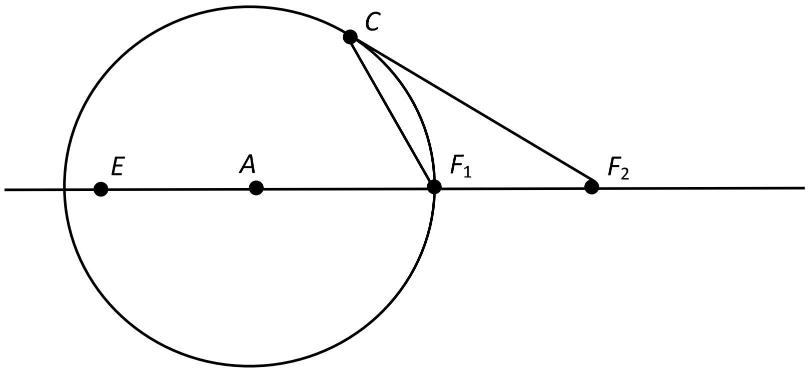
Opgave 15

a Maak de volgende tekening:



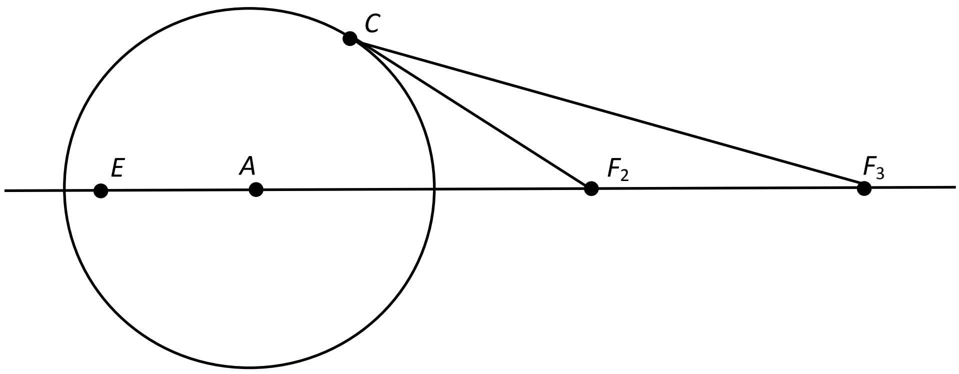
Omdat ΔAF_1C gelijkbenig is, geldt $\angle AF_1C = \angle A\,CF_1$ (propositie 5).
Nu is $\angle CAE$ een buitenhoek van ΔAF_1C en volgens het resultaat van opgave 15 volgt:
$\angle CAE = \angle AF_1C + \angle A\,CF_1$.
Omdat $\angle AF_1C = \angle A\,CF_1$ volgt: $\angle EAC = \angle AF_1C + \angle A\,CF_1 = 2\angle AF_1C$.
Delen door 2 geeft: $\angle AF_1C = ½\,\angle EAC$.

b Maak de volgende tekening:



Omdat $F_1C = F_1F_2$ is ΔCF_1F_2 gelijkbenig, en dus is $\angle F_1CF_2 = \angle F_1F_2C$.
$\angle AF_1C$ is een buitenhoek van ΔCF_1F_2 en dus gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken: $\angle AF_1C = \angle F_1CF_2 + \angle F_1F_2C = 2\angle F_1F_2C = 2\angle AF_2C$.
Hieruit volgt: $\angle AF_2C = ½ \angle AF_1C$ en met het resultaat uit onderdeel a volgt: $\angle AF_2C = ¼ \angle EAC$.

c Maak de volgende tekening:



Soortgelijk als in onderdeel b volgt:
$\angle F_2CF_3 = \angle F_2F_3C$
en
$\angle AF_2C = \angle F_2CF_3 + \angle F_2F_3C = 2\angle F_2F_3C = 2\angle AF_3C$
ofwel:
$\angle AF_3C = ½ \angle AF_2C = 1/8 \angle EAC$.

d $\angle EAC$ is hooguit 180°. Iedere keer als we een volgend punt F_n construeren, wordt $\angle AF_nC$ gehalveerd. Dus op enig moment moet dit kleiner zijn dan 10°.

e We kunnen ‘oneindig’ door gaan en dus de $\angle AF_nC$ kleiner krijgen dan een willekeurig gekozen hoek.

Opgave 16

In deze opgave moeten we aan gaan tonen: "Als de hoekensom van iedere driehoek gelijk is aan 180°, dan gaat er door een punt buiten een rechte één lijn evenwijdig aan die rechte". We doen dat door aan te tonen dat als de som van twee hoeken in een driehoek kleiner is dan 180°, dat er dan sprake is van snijden zijden. En dat als de som van de twee hoeken precies gelijk is aan 180°, dat dan de 'zijden' niet snijden, maar dat er dan precies één lijn is en dat die evenwijdig is aan de gegeven rechte.

Geef het snijpunt van het verlengde van *CD* met de lijn door *AB* de naam *S*.

a Gegeven is $\angle BAC + \angle DCA < 170°$. Omdat de hoekensom gelijk is aan 180° volgt dat $\angle ASC > 10°$.
Verder is gegeven: $\angle AF_nC < 10°$. Dus $\angle AF_nC < \angle ASC$.

In ΔASC geldt: $\angle CAS + \angle ASC + \angle SCA = 180°$.
In ΔAF_nC geldt: $\angle CAF_n + \angle AF_nC + \angle F_nCA = 180°$.
Omdat bovendien geldt: $\angle CAS = \angle CAF_n$ en $\angle SCA = \angle DCA$ volgt:
$\angle ASC + \angle DCA = \angle AF_nC + \angle F_nCA$.
Met $\angle AF_nC < \angle ASC$ volgt nu direct: $\angle DCA < \angle F_nCA$.

b Kijk naar ΔACF_n. Een lijn *CD* vanuit *C*, met $\angle ACD < \angle ACF_n$, valt binnen de driehoek. De lijn *CD*, of het verlenfde, snijdt dus zijde AF_n binnen de driehoek, dus het snijpunt ligt tussen *A* en F_n.

c Dit gaat op precies dezelfde wijze als onderdelen a en b, maar nu voor 1°, in plaats van 10°.