rijksuniversiteit groningen

# Niet-euclidische meetkunde

## Les 3
## Meetkunde op de bol

(Deze les sluit aan bij de paragrafen 2.1 en 2.2 van de tekst Niet-Euclidische meetkunde van de Wageningse Methode)

# Kun je het vijfde postulaat afleiden uit de voorgaande vier?

Vanwege de bijzondere formulering is lange tijd gezocht naar een bewijs dat je het vijfde postulaat uit de voorgaande vier bewijzen.

Dus ook dat je de stelling over de som van de hoeken in een driehoek zou kunnen bewijzen uit de eerste vier postulaten.


Lees de bladzijden 12 tot en met 15.
Wat is het antwoord op bovenstaande vraag?
Wie leverde dat antwoord en hoe deed hij dat?

# Niet-Euclidische meetkunde

Euclidische meetkunde:

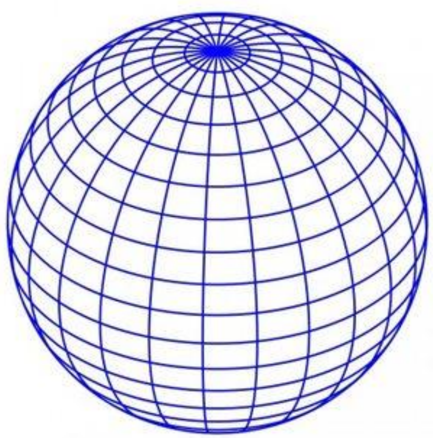
- het vijfde postulaat doet mee: door een punt buiten een lijn gaat **precies één** lijn die parallel is met die lijn.

Niet- Euclidische meetkunde:

- het vijfde postulaat doet niet mee
  - Elliptische meetkunde: door een punt buiten een lijn gaat **geen** lijn die parallel is met die lijn.
  - Hyperbolische meetkunde: door een punt buiten een lijn gaan **oneindig veel** lijnen die parallel zijn met die lijn.

# Meetkunde op de bol

Op de aarde wordt een plaats aangegeven door middel van coördinaten in het netwerk van meridianen en breedtecirkels (parallellen).



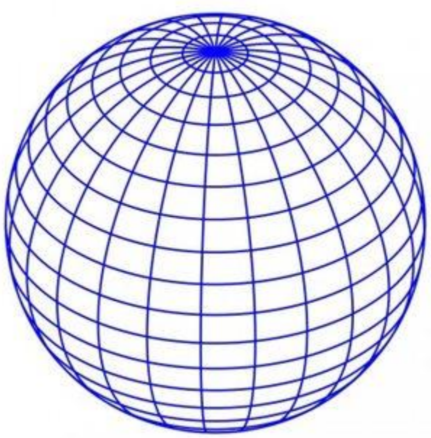
De verticale cirkels zijn de meridianen.
Ze geven de lengtegraden aan.

De horizontale cirkels zijn de breedtecirkels,
Ze geven de breedtegraden aan.

# Meetkunde op de bol

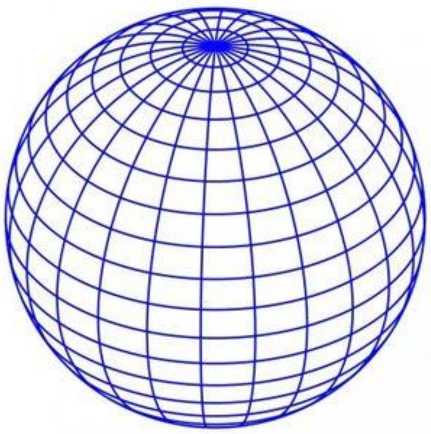
Op de aarde wordt een plaats aangegeven door middel van coördinaten in het netwerk van meridianen en breedtecirkels (parallellen).

De meridianen zijn allemaal even groot en elke meridiaan is de doorsnede van de bol met een verticaal vlak door het middelpunt van de aarde.



# Meetkunde op de bol

Op de aarde wordt een plaats aangegeven door middel van coördinaten in het netwerk van meridianen en breedtecirkels (parallellen).

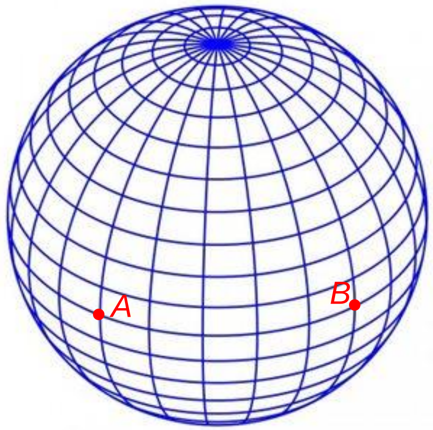


De meridianen zijn allemaal even groot en elke meridiaan is de doorsnede van de bol met een verticaal vlak door het middelpunt van de aarde.

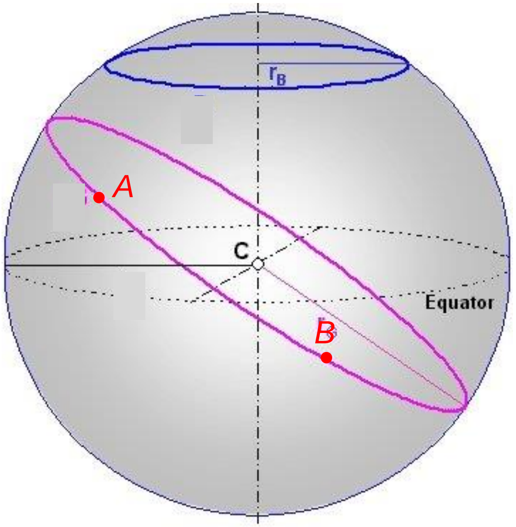
Breedtecirkels verschillen in grootte. Ze zijn de doorsnede van een horizontaal vlak met de bol.
De evenaar is de enige breedtecirkel die een doorsnede is van de bol met een vlak door het middelpunt van de aarde.


# Meetkunde op de bol


Kies twee punten *A* en *B* op de evenaar.
Welke kromme is de kortste verbinding tussen die punten?



# Meetkunde op de bol




De evenaar is de doorsnede vlak door het middelpunt van de aarde en de aardbol.

Gegeven twee willekeurige punten *A* en *B* op de aardbol.
Neem het vlak door *A*, *B* en het middelpunt *C*.
De doorsnede van dit vlak met de bol is een cirkel door *A* en *B.*
Een dergelijke cirkel heet een grootcirkel.

De kortste verbinding tussen *A* en *B* op de bol is het cirkelsegment op de grootcirkel door *A* en *B.*

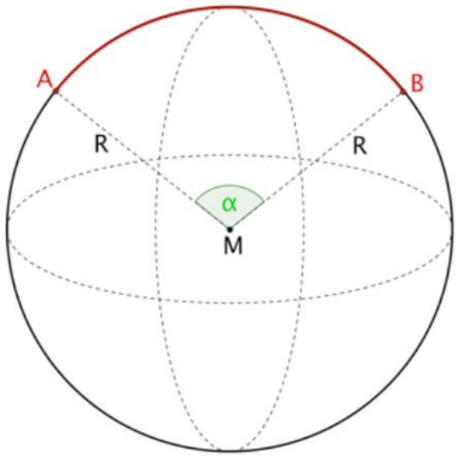
# Meetkunde op de bol


Lees opgave 18.

# Meetkunde op de bol

In het platte Euclidische vlak is de rechte lijn de kortste verbinding tussen twee punten.

Op dezelfde manier wordt een grootcirkel op de bol opgevat als een (rechte) lijn op de bol.




Voor een lijnstuk tussen *A* en *B* kun je kiezen tussen de rode cirkelboog (boven) of de zwarte (onder).

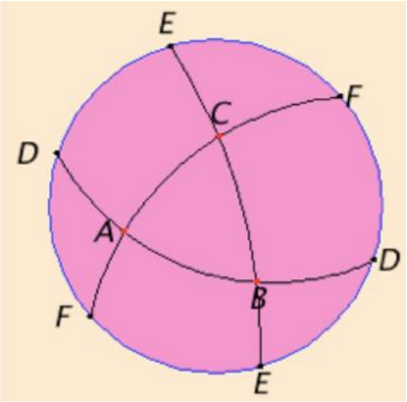
Voor de kortste boog geldt dat $\alpha < \pi$ (radialen)
Het rode cirkelsegment is nu per definitie in deze meetkunde de kortste afstand tussen de punten *A* en *B*.
Dit noemen we het lijnstuk *AB* op de bol.

# Diametrale punten

De Noordpool en de Zuidpool liggen op één lijn met het middelpunt *M.* Dat betekent dat er oneindig veel vlakken door deze drie punten gaan. En dus dat beide punten door oneindig veel grootcirkels (de meridianen) worden verbonden.

Het zelfde geldt voor andere diametrale punten op de bol, dat zijn punten die op één lijn liggen met het middelpunt.

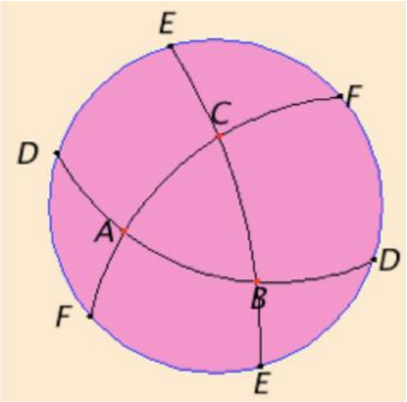
Om problemen met het eerste postulaat te voorkomen, vatten we een dergelijk diametraal puntenpaar op als één punt (met twee locaties).



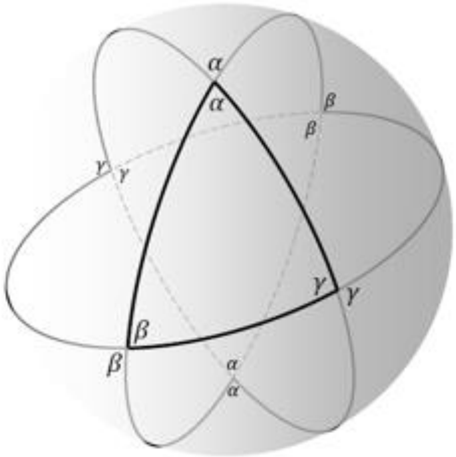
# De vier postulaten

Opdracht 21

Laat zien dat de eerste vier postulaten van Euclides geldig zijn voor de meetkunde op de bol.



# Het vijfde postulaat



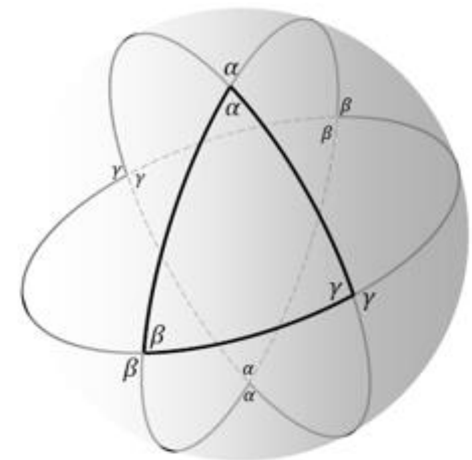
Volgens Euclides zijn twee lijnen evenwijdig (parallel) als ze geen snijpunt hebben.

In de meetkunde op de bol geldt dezelfde afspraak:
twee lijnen (= grootcirkels) zijn evenwijdig (parallel) als ze geen snijpunt hebben.


Verklaar waarom twee verschillende lijnen op de bol altijd één snijpunt hebben.

# Het vijfde postulaat

Verklaar waarom twee verschillende lijnen op de bol altijd één snijpunt hebben.




Uitwerking

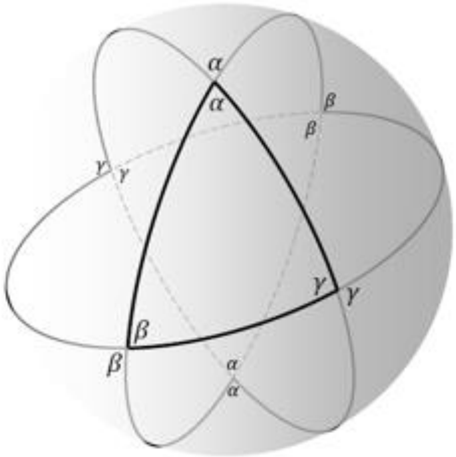
De twee grootcirkels zijn de doorsnijdingen van verschillende vlakken door *M*.
De twee vlakken hebben een snijlijn.
De snijlijn van die vlakken doorsnijden de bol in twee diametrale punten.
Dat geldt als één punt.

# Het vijfde postulaat

## Conclusie

Voor de meetkunde op de bol geldt het vijfde Postulaat niet.

STOP Wat betekent dit voor de som van hoeken in een boldriehoek en de stelling van Pythagoras?



# Oefenen

Maken: Opgave 22 en 23

# Huiswerk

Inleveren

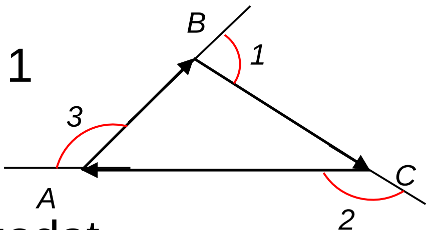
Het volgende is een eenvoudig bewijs van de stelling over de hoekensom.

Je loopt de driehoek rond volgens de pijlen.

Je begint bij *A.* Bij *B* aangekomen draai je hoek 1 naar rechts, zodat je neus naar *C* gericht staat.

Je loopt naar *C* en draait weer rechtsom over hoek 2. Dan terug naar A en draai over hoek 3 zodat je weer naar B gericht staat.

In totaal heb je 360° gedraaid.




→ Laat zien dat hieruit volgt dat de som van de hoeken 180° is.

→ Waar heb je bij dit bewijs het vijfde postulaat gebruikt?
(Tip: maak dezelfde wandeling eens over een bol.)