



Niet-euclidische meetkunde

Les 4

Hyperbolische meetkunde

(Deze les sluit aan bij de paragraaf 3 van de tekst
Niet-Euclidische meetkunde van de Wageningse Methode)



Euclidische meetkunde

Het vijfde postulaat doet mee:

Door een punt buiten een lijn gaat **precies één** lijn die parallel is met die lijn.

Dat is de vlakke meetkunde zoals je die al kent: met lijnen, driehoeken, veelhoeken, cirkels, parabolen,.....

NB **parallel** betekent: geen gemeenschappelijk snijpunt.



Niet-Euclidische meetkunde

Het vijfde postulaat doet niet mee

- **Elliptische meetkunde**: door een punt buiten een lijn gaat **géén** lijn die parallel is met die lijn.
- **Hyperbolische meetkunde**: door een punt buiten een lijn gaan **oneindig veel** lijnen die parallel zijn met die lijn.



Elliptische meetkunde

Meetkunde op de bol: door een punt buiten een lijn gaat **géén** lijn die parallel is met die lijn.

- Grootcirkels zijn lijnen.
- Som van de hoeken in een driehoek groter dan 180°
- Toepassingen bij navigatie op de aardbol
- Concreet voorstelbaar



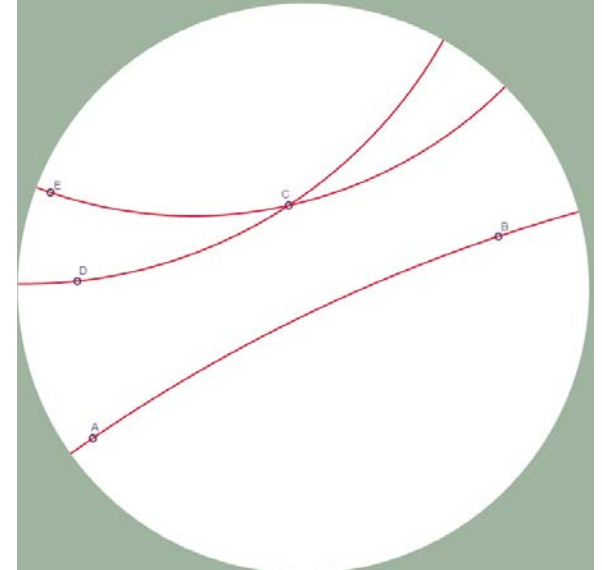
Hyperbolische meetkunde

Meetkunde op de Poincaré-schijf

Dit is een bijzondere meetkunde binnen een cirkelschijf.

Is dit nog wel meetkunde?

Lees vooraf paragraaf 2.3





De Poincaré schijf

Een computerpracticum



- Ga naar <https://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html>
- Je ziet eerst een animatie.
- Met de menu's kun je experimenteren

-- Select a Construction Mode -- ▾

-- Select Measurement or Modification -- ▾

Polar Coordinates:($r= 3.865$, $\varphi= -5.6^\circ$)

$m\angle ATB = 90.0^\circ$

$m\angle ATC = 90.0^\circ$

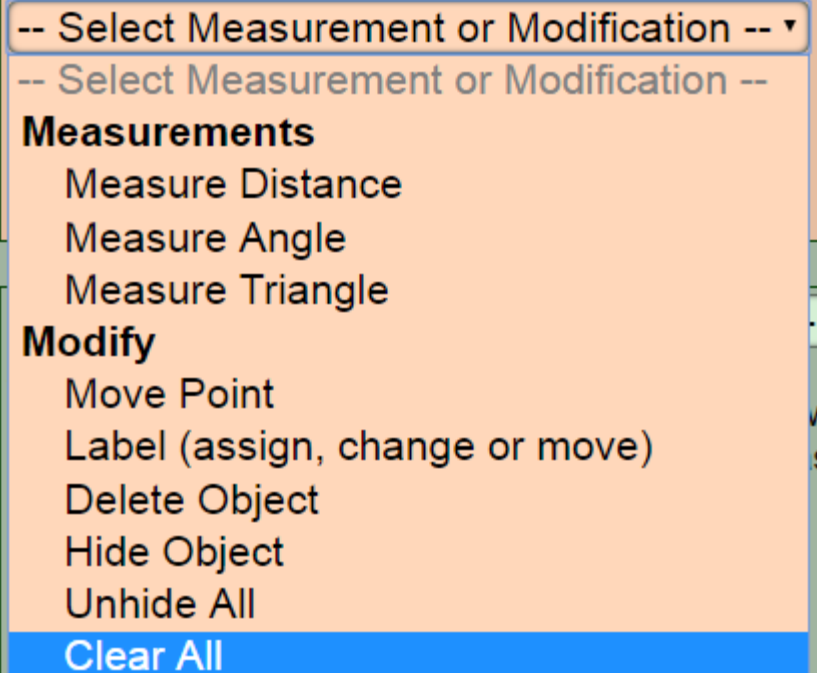


De Poincaré schijf

Een computerpracticum



- Maak eerst je scherm leeg

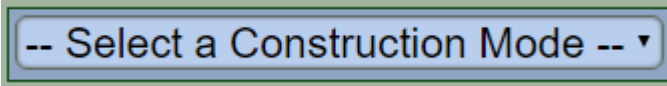




De Poincaré schijf

Een computerpracticum



- Klik op het pijltje van 
- Teken twee punten
- Teken een lijnstuk door beide punten
- Teken een lijn
- Teken een punt buiten die lijn
- Teken een lijn door het punt die parallel is met de eerste lijn.



De Poincaré schijf

Een computerpracticum

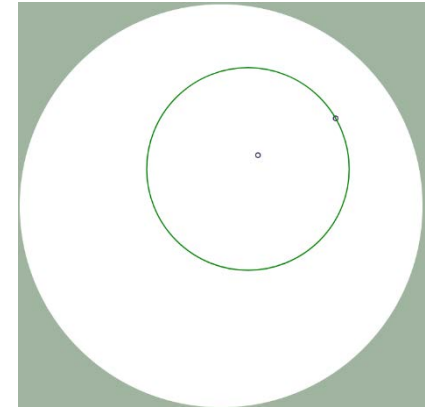
Ook in deze meetkunde is een cirkel de verzameling van alle punten met een vaste afstand tot het middelpunt.



- Teken een cirkel

Je ziet dat het middelpunt niet in het midden van de cirkel zit. Dat komt omdat de afstanden worden berekend met een formule, waarbij je de afstand tot de rand als oneindig ver weg ervaart.

- Met Move Point kun je het middelpunt verplaatsen. Verschuif het middelpunt zo dicht mogelijk naar de rand en zie wat er gebeurt.





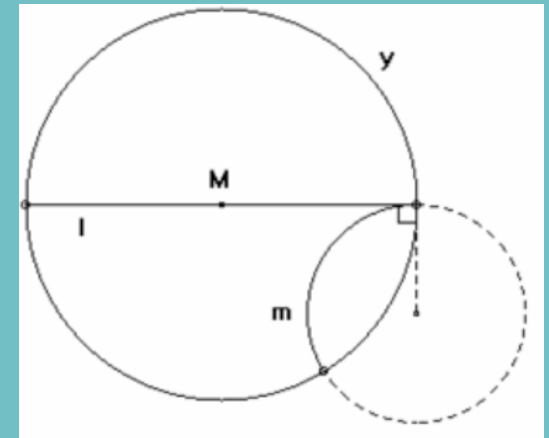
De Poincaré schijf

Een **lijn** op de Poincaré schijf is

- een 'open' cirkelboog die de rand γ loodrecht snijdt.
- een 'open' middellijn door het midden M van de schijf.

('open' betekent de rand doet niet mee.)

Een **hoek** tussen twee snijdende lijnen is de hoek tussen de raaklijnen aan de cirkelbogen.





De Poincaré schijf

Afstand op de Poincaré schijf

Een computerpracticum



Maak opgave 27 om een idee te krijgen hoe de afstand gemeten wordt op de Poincaré-schijf.



De Poincaré schijf



Computerpracticum: Is dit nog wel meetkunde?

Net als bij de Euclidische meetkunde kun je het midden van een lijnstuk construeren met passer en liniaal.

1. Teken een lijnstuk op de Poincaré schijf en construeer het midden van dat lijnstuk.
2. Teken een driehoek en construeer de zwaartelijnen in de driehoek en laat zien dat de zwaartelijnen door één punt gaan.



De Poincaré schijf



Computerpracticum: Is dit nog wel meetkunde?

Net als bij de Euclidische meetkunde kun je het midden van een lijnstuk construeren met passer en liniaal.

1. Teken een lijnstuk op de Poincaré schijf en construeer het midden van dat lijnstuk.
2. Teken een driehoek en construeer de zwaartelijnen in de driehoek en laat zien dat de zwaartelijnen door één punt gaan.

Op NonEuclid.jar kun je je constructies controleren via het menu:

-- Select from Gallery / Activities or Save -- ▾



De Poincaré schijf

Computerpracticum: Is dit nog wel meetkunde?



Laat met het programma NonEuclid.jar zien dat de eerste vier postulaten (zie blz 37) op de Poincaré schijf geldig zijn en dat het vijfde postulaat niet geldig is.

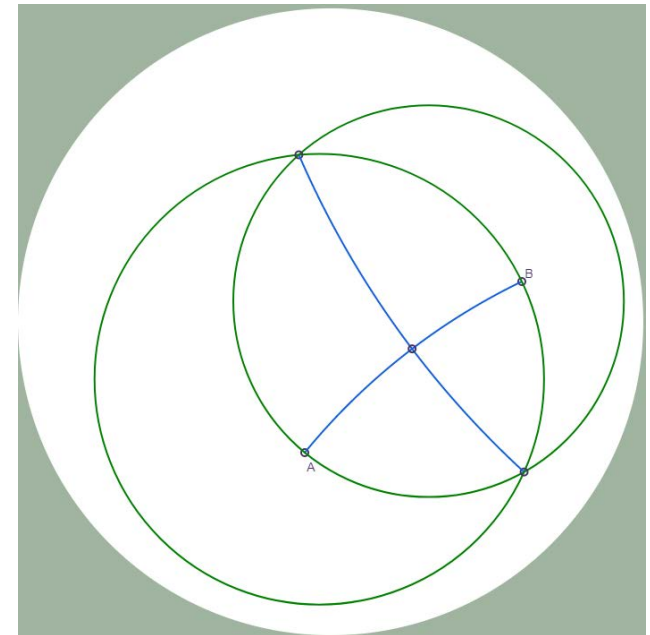


De Poincaré schijf

Computerpracticum: Is dit nog wel meetkunde?

Uitwerking (postulaat 4)

In de figuur zie je hoe je een rechte hoek kunt construeren. Door punt A of B te verslepen kun je controleren dat alle rechte hoeken gelijk zijn.





De Poincaré schijf

Computerpracticum: Is dit nog wel meetkunde?

Uitwerking (postulaat 5)

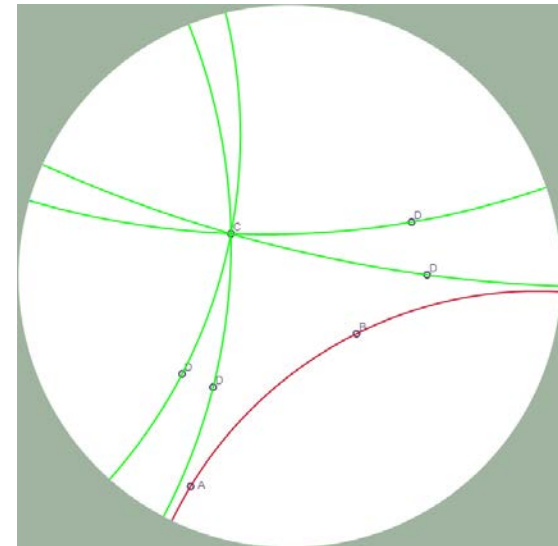
Gegeven een lijn door A en B .

C is een punt buiten de lijn.

De lijnen door C en D zijn parallel met de lijn door A en B .

Door D te verslepen krijg je oneindig veel lijnen die parallel zijn met de lijn AB .

Postulaat 5 is niet geldig.





De Poincaré schijf

Computerpracticum: De som van de hoeken in een driehoek

Propositie 32 stelt dat de som van de hoeken in een driehoek 180° .
Bij het bewijs hiervan heb je het vijfde postulaat nodig.



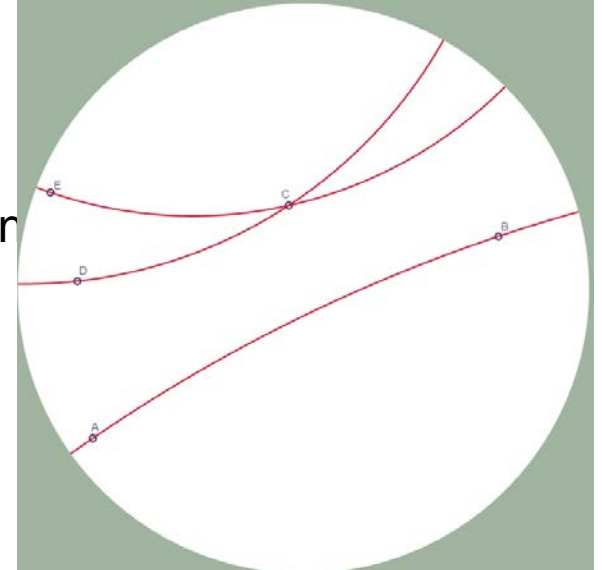
Onderzoek de geldigheid van propositie 32 op de Poincaré cirkel.



Hyperbolische meetkunde

Meetkunde op de Poincaré-schijf: door een punt buiten een lijn gaan oneindig veel lijnen die parallel zijn met die lijn.

- Meetkunde op een cirkelschijf
- De rand doet niet mee
- Hoe dichtër één punt bij de rand, hoe groter de 'afstand' tussen twee punten
- Cirkelbogen die loodrecht staan op de rand zijn lijnen.
- Som van de hoeken in een driehoek kleiner dan 180°
- Abstract model
- In beeld gebracht door Maurits Escher





Oefenen

Maken: Opgave 26 tot en met 29.

Lezen: Bladzijde 27

Maken: Opgave 30



Huiswerk

Inleveren

- Laat zien hoe je een rechthoekige driehoek kunt construeren op de Poincaré schijf.
- Onderzoek hiermee de geldigheid van de stelling van Pythagoras op de Poincaré schijf.