Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 1

Paragraaf 1.2 Systematisch uitschrijven

Opgave 2

a) De cijfers op de proefwerken zijn gehele cijfers. De som van de drie cijfers moet 24 moet precies 24 zijn.
Als er voor twee proefwerken een zo hoog mogelijk cijfer, dat is een 10 gehaald wordt, dan moet er voor het derde proefwerk een 4 gehaald zijn. Dat geeft de mogelijkheid 10-10-4.
Als er nu voor het eerste proefwerk een 10 en voor het tweede proefwerk een 9 gehaald wordt, dan volgt de mogelijkheid 10-9-5.
Voor het tweede proefwerk nog een puntje lager geeft de mogelijkheid 10-8-6.
En voor de daarop volgende mogelijkheid vinden we 10-7-7.
Als we nu voor het tweede proefwerk nog een puntje lager gaan, dus een 6, dan moet het derde proefwerk een 8 zijn, maar die combinatie hebben we al. En als we doorgaan met voor het eerste proefwerk een 10 en voor het tweede steeds een lager punt, dan vinden we geen nieuwe combinaties.
Dat betekent dat alle mogelijkheden waarin tenminste een 10 voor komt zijn:
10-10-4
10-9-5
10-8-6
10-7-7.
Nu verlagen we het resultaat voor het eerste proefwerk een punt, dus dat wordt een 9. Als we nu voor het tweede proefwerk een 10 zouden kiezen, dan komen we uit op 9-10-5, maar die mogelijkheid hebben we al gevonden met 10-9-5. Er mogen dus geen 10-en voorkomen in de volgende rijtjes.
Met twee 9's, moet het derde proefwerk een 6 zijn: 9-9-6.
Verlagen we het tweede resultaat één punt, dan vinden we: 9-8-7.
Verlagen we het tweede resultaat nog één punt, dan vinden we: 9-7-8, maar die mogelijkheid hebben we al, en ook als we door gaan met het tweede resultaat verlagen, dan vinden we geen nieuwe oplossingen.
De mogelijkheden waarin als hoogste cijfer een 9 voorkomt zijn dus:
9-9-6
9-8-7.
Als het hoogste resultaat een 8 mag zijn, dan is er maar één mogelijkheid:
8-8-8.
Op deze manier hebben we dus 7 verschillende mogelijkheden gevonden.

b) De methode die we gevolgd hebben is dus:
Als eerste cijfer kiezen we een zo hoog mogelijk resultaat; daarbij kiezen we als tweede resultaat ook een zo hoog mogelijk resultaat dat niet hoger is dan het eerste resultaat. En als derde cijfer kiezen we een resultaat dat de som van de drie cijfers precies 24 maakt, zonder dat we een eerder gevonden resultaat opnieuw vinden.
Vervolgens verlagen we het eerste cijfer één punt en herhalen we de procedure.
We herhalen het verlagen van het eerste cijfer, tot er geen oplossingen meer zijn.

Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 1

Opgave 3

a) Je hebt vijf posities. Als eerste leg je de D en de L, en dan vul je de overgebleven posities op met de E's.
Je kunt de D op positie 1 leggen, en dan de L op positie 2, 3, 4 of 5.
Vervolgens kun je de D op positie 2 leggen en dan de L op 1, 3, 4, of 5. Enzovoorts.
Je vindt dan de volgende verschillende rijtjes.

D L E E E	L D E E E	L E D E E	L E E D E	L E E E D
D E L E E	E D L E E	E L D E E	E L E D E	E L E E D
D E E L E	E D E L E	E E D L E	E E L D E	E E L E D
D E E E L	E D E E L	E E D E L	E E E D L	E E E L D

b) Voor de keuze van de positie van de eerste D heb je 5 mogelijkheden. Daarna heb je bij iedere keuze voor de D nog 4 mogelijke posities voor de L. Dat geeft 20 mogelijkheden. De rest wordt opgevuld met E's.
Door te tellen in de tabel zie je ook dat er 20 mogelijkheden zijn

Opgave 4

Bij het eerste briefje dat je trekt kun je 3 verschillende cijfers trekken. Dat geeft dus 3 mogelijkheden. Bij ieder cijfer dat je als eerste getrokken hebt, heb je nog twee verschillende mogelijkheden voor het tweede cijfer. Dat geeft dus voor de eerste twee cijfers $3 \cdot 2 = 6$ verschillende mogelijkheden. Als je twee briefjes getrokken hebt, dan is er nog maar één briefje over, dus ook maar 1 mogelijkheid om een cijfer te trekken.
Voor de drie cijfers samen worden dat dan dus $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschillende mogelijkheden.
Dat zijn hier de getallen 752, 725, 572, 527, 275 en 257.

Opgave 5

Bij het eerste briefje dat je trekt kun je 2 verschillende cijfers trekken. Dat geeft dus 2 mogelijkheden. Bij ieder cijfer dat je als eerste getrokken hebt, heb je daarna opnieuw twee verschillende mogelijkheden voor het tweede cijfer, immers, het briefje is teruggedaan in de vaas. Dat geeft dus voor de eerste twee cijfers $2 \cdot 2 = 4$ verschillende mogelijkheden.
Als je twee keer een briefje getrokken hebt, dan heb je voor het derde briefje opnieuw keuze uit 2 mogelijkheden om een cijfer te trekken. Dat worden dan dus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mogelijkheden.
En ook voor de vierde keer heb je weer twee mogelijkheden.
Voor de vier cijfers worden dat dan dus $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ verschillende mogelijkheden. Er zijn dus 8 getallen met vier cijfers, als we de 3 en 9 vaker mogen gebruiken.
Dat zijn hier de getallen 3333, 3339, 3393, 3933, 9333, 3399, 3939, 9339, 3993, 9393, 9933, 3999, 9399, 9939, 9993 en 9999.

Opgave 6

Om te kijken hoeveel samenstellingen er zijn om beide praktische opdrachten af te ronden, kunnen we ook kijken op hoeveel manieren we één tweetal van de vier vriendinnen kunnen kiezen. Dat tweetal gaat dan de wiskundeopdracht maken en de andere twee doen de andere opdracht.
Kiezen we als eerste Anne (A), dan kunnen we als tweede nog kiezen uit de andere drie. Dat geeft de mogelijkheden AB, AC en AD.
Kiezen we vervolgens Beatrice als eerste, dan hebben we de mogelijkheid met Anne al gehad, want dat was de keuze AB. Blijven er dus nog twee over om te kiezen: BC en BD.
Als we als eerste Cathy kiezen, dan kunnen we daarbij nog Demi kiezen, want de andere

tweetallen hebben we al gehad.
Alles bij elkaar geeft dat de volgende 6 samenstellingen: AB, AC, AD, BC, BD en CD.

Opgave 7

Nummer de vakken 1, 2, 3 en 4. Dan moeten we aan ieder vak een kleur toekennen, waarbij we twee keer een vak rood maken. Dat komt op hetzelfde neer als eerst kiezen welke van de vakken we geel en blauw maken, en dan daarna de andere twee vakken rood maken.
Als we vak 1 geel maken, dan hebben nog drie mogelijkheden om een vak te kiezen blauw te maken. Dat zijn dus de mogelijkheden GBRR, GRBR en GRRB.
Als we vak 2 geel maken, dan zijn er de drie mogelijkheden BGRR, RGBR en RGRB.
Enzo volgen als we vakken 3 en 4 geel maken de twee keer drie mogelijkheden BRGR, RBGR, RRGB, BRRG, RBRG en RRBG.
In totaal zijn dat dus 12 mogelijkheden. Of ook wel, bij ieder van de eerste vier keuzes voor geel, zijn er nog drie keuzes voor blauw. En dat geeft $4 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden.

Opgave 8

Ieder kind kan in de ene of de andere kamer gaan slapen en heeft dus keuze uit 2. Het eerste kind heeft dus twee mogelijkheden. Bij ieder van die twee mogelijkheden heeft het tweede kind ook keuze uit 2. Dat zijn dus $2 \cdot 2 = 4$. Met het derde kind verdubbelt het aantal mogelijkheden opnieuw en komt op 8. En dan heeft het vierde kind ook weer bij ieder van de mogelijke keuzes van de eerst drie, opnieuw twee mogelijkheden. Zo vinden we uiteindelijk het totaal aantal verschillende mogelijkheden met: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Opgave 10

Eigenlijk komt het er hier op neer dat je drie kleuren uit vijf moet kiezen. Noteer de kleuren met G, B, R, O, P. En maak dan steeds rijtjes van drie met verschillende letters, terwijl de volgorde in de rijtjes er niet toe doet. Dat geeft de volgende rijtjes:
GBR, GBO, GBP, GRO, GRP, GOP, BRO, BRP, BOP en ROP.
Dit zijn 10 verschillenden verdelingen.

Opgave 11

Opgaven 5 en 8 zijn ook soortgelijk. Enkele achter elkaar heb je steeds evenveel mogelijkheden.
En ook opgaven 4 en 9 zijn soortgelijk.

Paragraaf 1.3 Bomen en wegendiagrammen

Opgave 12

Zie het antwoord in het digitale boek.

Opgave 13

a) Zie de tekening van de boom bij de uitwerking in het digitale boek.
b) In de tekening kun je tellen dat er 24 eindpunten zijn. Maar je kunt ook uitrekenen. Er zijn evenveel eindpunten van de boom als er verschillende vlaggen zijn. Om het aantal verschillende vlaggen te berekenen redeneer je als volgt. Voor de bovenste baan heb je keus uit 4 kleuren. Bij ieder van die keuzen heb je 3 mogelijkheden voor de tweede baan. Dat zijn samen $4 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden. Bij ieder van die 12 mogelijkheden heb je nog twee keuzes voor de derde baan, en daarna ligt ook de vierde baan vast.

In totaal zijn dat dus 4 · 3 · 2 · 1 = 24 verschillende vlaggen en dus ook 24 verschillende eindpunten voor de boom.

c) Als de bovenste baan rood moet zijn, dan zijn er nog drie banen over en daar heb je drie kleuren voor. Op dezelfde manier als onder b) redeneer je: eerst keuze uit drie, dan keuze uit twee en dan ‘keuze uit één’, dus 3 · 2 · 1 = 6 mogelijkheden.
En als de derde baan rood moet zijn, dan moet je dus de eerste, tweede en vierde baan een kleur geven, waar je drie kleuren voor hebt. Dat gaat op precies dezelfde manier als in het geval dat de bovenste baan rood is. Dus ook hier 6 mogelijkheden.

d) Nu moet je nog twee banen een kleur geven, en je hebt daar twee kleuren voor. Voor de eerste van die twee heb je 2 mogelijkheden, en daarna ligt de kleur van de laatste baan vast. Dat zijn dus 2 · 1 = 2 mogelijkheden. Dat zijn de vlaggen: R Ge Gr B en R Gr Ge B..

Opgave 14

a) Voor de eerste baan heb je keus uit 5, voor de tweede baan dan nog keus uit 4, want je mag eenzelfde kleur niet nog een keer gebruiken. En voor de derde baan heb je dan nog keus uit 3. Dat geeft in totaal: 5 · 4 · 3 = 60 mogelijkheden.
De boom die hierbij hoort is een 5-4-3-boom.

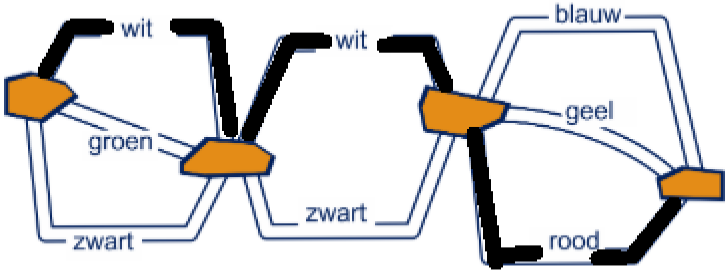
b) Voor de eerste baan heb je opnieuw 5 mogelijkheden, en voor de tweede baan weer 4, want je mag de kleur van de eerste baan niet opnieuw gebruiken. Voor de derde baan heb je nu 4 mogelijkheden, want je mag alleen de kleur van de tweede baan niet opnieuw gebruiken. Dat geeft dan dus 5 · 4 · 4 = 80 mogelijkheden. De boom die hierbij hoort is een 5-4-4-boom.

Opgave 15

De mogelijkheden zijn uitgetekend in de boom aan de rechterkant. Dat is een 3-2-3-boom. Het aantal verschillende tenues is dan 3 · 2 · 3 = 18.

Opgave 16

a)



.

b) Je hebt eerst 3, dan 2 en vervolgens 3 keuzes. Door die aantallen met elkaar te vermenigvuldigen vindt je alle mogelijkheden. Dus 3 · 2 · 3 = 18.

Opgave 17

Zie het antwoord in het digitale boek.

Opgave 18

a) Er zijn 4 wegen van *B* naar *C*, dus dat kan op 4 manieren.

b) Het maakt niet uit hoe je van *A* naar *B* gaat, je hebt steeds 4 manieren om van *B* naar *C* te gaan.

c) Van *A* naar *B* heb je 3 manieren, en bij ieder van die manieren heb je 4 manieren om van *B* naar *C* te gaan. Er zijn dus in totaal 3 · 4 = 12 verschillende routes van *A* naar *C*.

Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 1

Opgave 19

a) Er zijn 3 wegen van A naar B, 4 wegen van B naar C en 3 wegen van C naar D. Er zijn dus in totaal $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ verschillende routes van A naar D.
b) Er zijn evenveel verschillende routes van A naar D als van D naar A. Bij ieder van de 36 routes van A naar D heb je ook 36 mogelijke routes terug, dus er zijn $36 \cdot 36 = 1296$ routes heen en weer.
c) Er zijn 2 rechtstreekse wegen van P naar R. Dat geeft dus 2 routes.
De andere routes lopen via Q. Van P naar Q zijn er 3 wegen, en van Q naar R zijn er 2 wegen. Via Q zijn er dus $3 \cdot 2 = 6$ routes. Samen geeft dat $2 + 6 = 8$ routes.
d) Van A naar D kan via B of via C.
Van A naar D via B zijn er $2 \cdot 2 = 4$ verschillende routes.
Van A naar D via C zijn er $3 \cdot 1 = 3$ verschillende routes.
Samen geeft dit $4 + 3 = 7$ routes van A naar D.
Bij ieder van de routes van A naar D heb je 3 mogelijkheden om naar E te gaan.
In totaal zijn er dus $7 \cdot 3 = 21$ verschillende routes van A naar E.

Opgave 21

a) Voor de eerste plaats heeft Piet 8 mogelijkheden. Dan blijven er voor de tweede plaats nog 7 mogelijkheden over en voor de derde plaats 6 mogelijkheden. In totaal dus $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ mogelijkheden.
We hebben hierbij een 8-7-6-boom
b) Voor de eerste plaats heeft Piet nu 2 mogelijkheden. Zonder F voor zijn er dan voor de tweede plaats 6 en voor de derde plaats 5 mogelijkheden. Er zijn dus $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ briefjes mogelijk. We hebben hierbij een 2-6-5-boom.

Opgave 22

a) Voor het eerste cijfer 6 mogelijkheden, voor het tweede 5, enzovoorts, dus $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ mogelijkheden.
b) Voor de laatste vier posities zijn er 4 cijfers beschikbaar, dus zijn er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mogelijkheden.
c) Bij ieder van de telefoonnummers die we met 1, 1, 3, 5, 7 en 8 kunnen maken, kunnen we twee verschillende telefoonnummers maken met 1, 3, 5, 7, 8 en 9. Namelijk door ofwel de eerste 1, ofwel de tweede 1 door een 9 te ontvangen. Het totaal aantal van 720 verschillende telefoonnummers met allemaal verschillende cijfers moeten we dus delen door 2: er zijn $720 / 2 = 360$ verschillende telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7 en 8.
d) Bij ieder van de telefoonnummers die we met 1, 1, 1, 3, 5 en 7 kunnen maken, kunnen we op 6 verschillende manieren verschillende telefoonnummers maken met 1, 3, 5, 7, 8 en 9, want we kunnen eerst één van de drie 1-en kiezen en die koppelen aan een 8 en dan hebben we nog keus uit twee 1-en om daar een 9 aan te koppelen. Dat geeft dus de $3 \cdot 2 = 6$ mogelijkheden.
e) Met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5 en 7 zijn er dus $720 / 6 = 120$ verschillende telefoonnummers mogelijk.
f) We koppelen nu aan één van de twee 1-en een 8 en aan één van de twee 3-en een 9. Bij ieder van de telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7 zijn dus vier verschillende telefoonnummers te maken met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. Dat betekent dat er $720 / 4 = 180$ verschillende telefoonnummers zijn met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5 en 7.