Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

4VWO - Blok 4 Inproduct

1 Cardano

(a) We hebben nu dat $p = 9$ en $q = -28$. Deze waarden kunnen we invullen in de formule van Cardano:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-14 + \sqrt{196 - 27}} + \sqrt[3]{-14 - \sqrt{196 - 27}} \\
&= \sqrt[3]{-14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{-14 - \sqrt{169}} \\
&= \sqrt[3]{-14 + 13} + \sqrt[3]{-14 - 13} \\
&= \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-27} \\
&= -1 - 3 \\
&= -4
\end{aligned}$$

(b) Door kwadraat af te splitsen krijgen we $x^3 - 9x + 28 = (x+4)(x^2 - 4x + 7)$. Nu kunnen we de abc-formule gebruiken om $x^2 - 4x + 7 = 0$ op te lossen. $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -12 = 12i^2$ en dus zijn de oplossingen:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4 - \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} \\
x &= \frac{4 + \sqrt{12i^2}}{2} = \frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2 Het complexe vlak

(a) De vergelijking is een cirkel met straal $\sqrt{25} = 5$. Deze rand plus alle punten in de cirkel geven de gevraagd verzameling punten. Zie tekening onder uitwerking (c).

(b) $c = a + b = (-4 + 2) + (2 - 3)i = -2 - i$.
$d = a \cdot b = (-4 \cdot 2 - 2 \cdot -3) + (-4 \cdot -3 + 2 \cdot 2)i = -2 + 16i$.

(c) We berekenen de lengte van de vector van de oorsprong naar punt c respectievelijk punt d.

$|c-0| = |c| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < 5$ dus punt c ligt binnen de cirkel van deelvraag (a).
$|d-0| = |d| = \sqrt{(-2)^2 + 16^2} = \sqrt{4+256} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65} > 5$ dus punt d ligt buiten de cirkel van deelvraag (a).

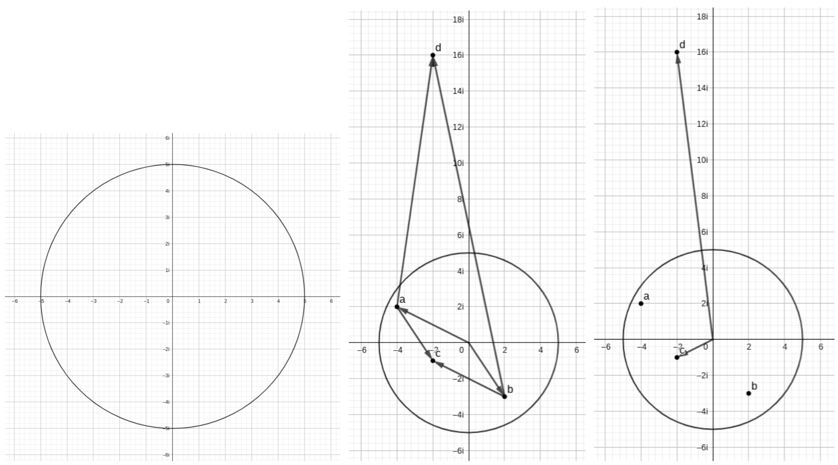

Figure 1: 2a, 2b, 2c

3 Complexe berekeningen

(a) $\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{1+2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{4-9i^2} = \frac{8+i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$. Dus $z = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$.
$|z| = \sqrt{(\frac{8}{13})^2 + (\frac{1}{13})^2} = \sqrt{\frac{64}{169} + \frac{1}{169}} = \sqrt{\frac{65}{169}} = \sqrt{\frac{5}{13}}$.
$\tan(\varphi) = \frac{1/13}{8/13} = \frac{1}{8} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(\frac{1}{8}) \approx 7,125°$. Er geldt π rad $= 180°$ dus $7,125°$ is gelijk aan $\frac{7,125 \cdot \pi}{180} \approx 0.124$ rad.
z geschreven in poolcoördinaten is $z = \sqrt{\frac{5}{13}} \cos(0.12) + \sqrt{\frac{5}{13}} \sin(0.12) \cdot i$.

(b) $\arg(z^3) = \arg(16 - 16i) = -\frac{1}{4}\pi \Rightarrow 3 \cdot \arg(z) = -\frac{1}{4}\pi \Rightarrow \arg(z) = -\frac{1}{12}\pi$ op een veelvoud van $\frac{2}{3}\pi$ na. Dus $\arg(z) = -\frac{1}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, 1\frac{1}{4}\pi$.
$|z^3| = |z|^3 = \sqrt{16^2 + (-16)^2} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2} \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$.
Nu: $z = 2\sqrt{2}(\cos(1\frac{1}{4}\pi) + \sin(1\frac{1}{4}\pi) \cdot i) = 2\sqrt{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}) = -2 - 2i$.

(c) $z = 4 - 6i$ dus $\overline{z} = 4 + 6i$.
$|z|^2 = \overline{z} \cdot z = (4+6i) \cdot (4-6i) = 16 + 36 = 52$.
Nu: $z^{-1} = \frac{4+6i}{52} = \frac{4}{52} + \frac{6}{52}i = \frac{1}{13} + \frac{3}{26}i$.

(d) Zij $z = 1 + i\sqrt{3}$, dan $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ en $\arg(z) = \frac{1}{3}\pi$. Nu kunnen we z uitdrukken in poolcoördinaten: $z = 2(\cos(\frac{1}{3}\pi) + \sin(\frac{1}{3}\pi) \cdot i)$.

Met de formule van de Moivre volgt dan dat
$z^4 = 2^4(\cos(4 \cdot \frac{1}{3}\pi) + \sin(4 \cdot \frac{1}{3}\pi) \cdot i) = 16(\cos(\frac{4}{3}\pi) + \sin(\frac{4}{3}\pi) \cdot i)$
$= 16 \cdot -\frac{1}{2} + 16 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i = -8 - 8i\sqrt{3}$.
Dus $(1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$.

4 Thales

$\angle acb$ is $90°$ als de vectoren $\overrightarrow{ac}$ en $\overrightarrow{bc}$ loodrecht op elkaar staan. Ofwel als $\overrightarrow{ac} \cdot \overrightarrow{bc} = 0$. We drukken de punten a, b en c eerst uit in poolcoördinaten:
$a = |a|(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = |a| \cdot (-|a| + i \cdot 0) = -|a|^2$,
$b = |b|(\cos(0) + i\sin(0)) = |a|(\cos(0) + i\sin(0)) = |a|(|a| + i \cdot 0) = |a|^2$,
$c = |c|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = |a|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.
Vervolgens berekenen we de vectoren $\overrightarrow{ac}$ en $\overrightarrow{bc}$:
$\overrightarrow{ac} = c - a = |a|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + |a|^2$,
$\overrightarrow{bc} = c - b = |a|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) - |a|^2$.
Nu:
$\overrightarrow{ac} \cdot \overrightarrow{bc} = |a|^2(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^2 - |a|^3(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + |a|^3(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) - |a|^4 = |a|^2 \cdot |a|^2 - |a|^4 = 0$.
Dus de vectoren $\overrightarrow{ac}$ en $\overrightarrow{bc}$ staan loodrecht op elkaar, ofwel $\angle acb = 90°$.