Wiskunde D Online Blok 11 Les 2 Huiswerk

Er is een beroemde manier om het Euler-getal e uit te benaderen: vul een zo groot mogelijk getal in voor n in $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

a) Probeer een voorbeeld op de rekenmachine en vergelijk met $e \approx 2{,}718281828\ldots$

In deze opgave ga je zien dat je dit kunt afleiden uit de methode van Euler voor het benaderen van oplossingen van differentiaal vergelijkingen.

We bekijken de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y$, met startwaarde $(0{,}1)$. Je weet: de oplossing is $y = e^x$.

We gaan nu telkens de methode van Euler gebruiken met wisselende stapgroottes Δx.

b) Wat vind je als benadering voor de oplossing in $x = 1$ met stapgrootte $\Delta x = 1$

c) Laat zien dat stapgrootte $\Delta x = \frac{1}{2}$, de benadering in $x = 1$ gelijk is aan $\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)$.

Merk op dat dit met buiten haakjes halen gelijk is aan $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

d) Laat zien dat stapgrootte $\Delta x = \frac{1}{3}$, de benadering in $x = \frac{2}{3}$ gelijk is aan $\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)$

e) Laat zien dat stapgrootte $\Delta x = \frac{1}{3}$, de benadering in $x = 1$ gelijk is aan $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$

f) Leg uit dat met stapgrootte $\Delta x = \frac{1}{n}$, de benadering in $x = 1$ gelijk is aan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

We weten eigenlijk wel dat de oplossing $y = e^x$, dus de benadering voor $x = 1$ geeft een benadering van $e^1 = e$.