Wiskunde D Online Oefentoets (antwoorden)

5VWO - Blok 11 Dynamische Modellen

1 Differentiaalvergelijking

(a) Om te laten zien dat $u^\star(t)$ een oplossing is, vullen we dit aan beide kanten van de differentiaalvergelijking in:

$$\frac{du^\star(t)}{dt} = \frac{(t+k)\cdot 4 - (4t+4k-1)\cdot 1}{(t+k)^2} = \frac{4t+4k-4t-4k+1}{(t+k)^2} = \frac{1}{(t+k)^2}$$

en

$$(4-u^\star(t))^2 = (4-\frac{4t+4k-1}{t+k})^2 = (\frac{4t+4k-4t-4k+1}{t+k})^2 = (\frac{1}{(t+k)})^2 = \frac{1}{(t+k)^2}.$$

Deze twee uitkomsten zijn gelijk aan elkaar en dus is $u^\star(t)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking.

(b) $k = 7$ geeft $u(t) = \frac{4t+28-1}{t+7} = \frac{4t+27}{t+7}$.
Onze beginwaarde is dan gelijk aan $u(0) = \frac{27}{7}$.

2 Richtingsveld

(a) Een groeisnelheid van 0 is hetzelfde als $\frac{dy}{dx} = 0$.
Dit geeft $4x^2 - 3y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{4}{3}x^2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\frac{4}{3}}x$ of $y = -\sqrt{\frac{4}{3}}x$.
Dit zijn twee rechte lijnen waarvan één met positieve richtingscoëfficiënt en één met negatieve richtingscoëfficiënt. De lijnen gaan ook beide door de oorsprong. Dit past bij het beeld van het richtingsveld van de differentiaalvergelijking.

(b) $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(4,5)} = 4\cdot 4^2 - 3\cdot 5^2 = 64 - 75 = -11.$

3 Coördinaten

We hebben de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = ax^2 + by^2$ en de vergelijking $y = c\cdot x$ (de y-coördinaat is c keer zo groot dan de x-coördinaat).

Nu $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c \cdot x) = c$ en dit geeft $ax^2 + b(c \cdot x)^2 = c$. Dit kunnen we verder uitwerken:

$$\begin{aligned} ax^2 + bc^2x^2 &= c \\ (a + bc^2)x^2 &= c \\ x^2 &= \frac{c}{a + bc^2} \\ x &= \sqrt{\frac{c}{a + bc^2}} \vee x = -\sqrt{\frac{c}{a + bc^2}} \\ &\text{en dus} \\ y &= c \cdot \sqrt{\frac{c}{a + bc^2}} \vee y = -c \cdot \sqrt{\frac{c}{a + bc^2}} \end{aligned}$$

De coördinaten zijn gelijk aan $\left(\sqrt{\frac{c}{a+bc^2}}, c \cdot \sqrt{\frac{c}{a+bc^2}}\right)$ en $\left(-\sqrt{\frac{c}{a+bc^2}}, -c \cdot \sqrt{\frac{c}{a+bc^2}}\right)$.

4 Appeltaart

(a) Deze differentiaalvergelijking beschrijft de temperatuurverhoging van de taart als hij eenmaal in de oven staat.

(b) De oplossingsfunctie is van de vorm $T = a + b \cdot e^{-ct}$. Als we deze functie afleiden krijgen we de volgende vergelijking: $\frac{dT}{dt} = -bc \cdot e^{-ct}$. Deze vergelijking kunnen we gelijkstellen aan onze oorspronkelijke differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} -bc \cdot e^{-ct} &= c \cdot (180 - T) \\ -b \cdot e^{-ct} &= 180 - a - b \cdot e^{-ct} \\ 0 &= 180 - a \end{aligned}$$

Dan $a = 180$ en $T = 180 + b \cdot e^{-ct}$. Omdat de temperatuur van de taart op $t = 0$ gelijk is aan $20°C$ volgt dat $180 + b \cdot e^{-c \cdot 0} = 20 \iff b = -160$. De oplossingsfunctie ziet er dus uit als $T = 180 - 160 \cdot e^{-ct}$.

(c) $T(0) = 20$
$T(1) = T(0) + c \cdot (180 - T(0)) = 20 + 180c - 20c = 20 + 160c$
$T(2) = T(1) + c \cdot (180 - T(1)) = 20 + 160c + 180c - 20c - 160c^2 = 20 + 320c - 160c^2$

(d) We hebben gekregen dat $T(2) = 35,6$. Dit geeft dan $20 + 320c - 160c^2 = 35,6$. Met je GR kun je dan berekenen dat $c = 0,05$. Als we deze c invullen in onze oplossingsfunctie en $t = 2$ krijgen we: $T(2) = 180 - 160 \cdot e^{-0,05 \cdot 2} \approx 35.2$. We kunnen zien dat de methode van Euler ongeveer hetzelfde antwoord geeft als de oplossingsfunctie.