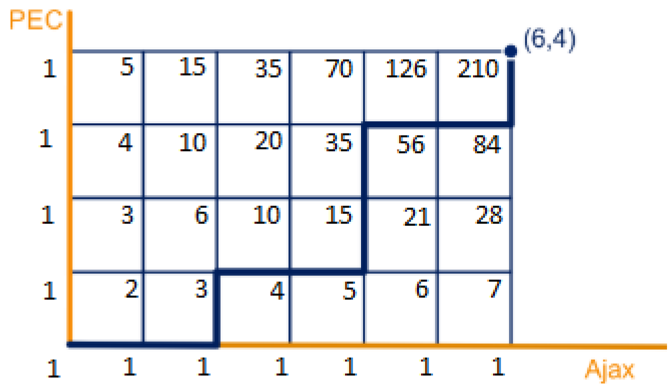
Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 3

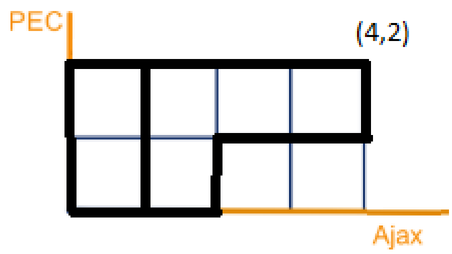
Paragraaf 1.5 Roosters

Opgave 40

a) Je kunt het aantal scoreverlopen berekenen door in het rooster bij ieder tussenpunt aan te geven op hoeveel manieren je er kunt komen. Vul eerst op de ondersten en meest link lijn bij ieder tussenpunt een 1 in, en tel daarna voor ieder tussenpunt steeds de aantallen in het punt er onder en links er naast bij elkaar op. Die samen vormen immers het totaal aantal routes naar het tussenpunt.
Je vindt dan onderstaand rooster.

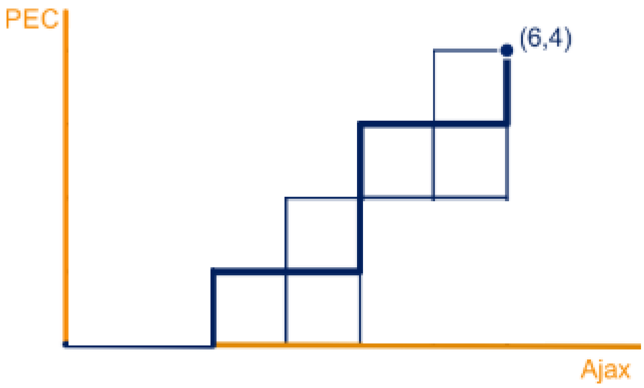


b) Er zijn bijvoorbeeld de volgende drie routes naar een ruststand 4-2 mogelijk.

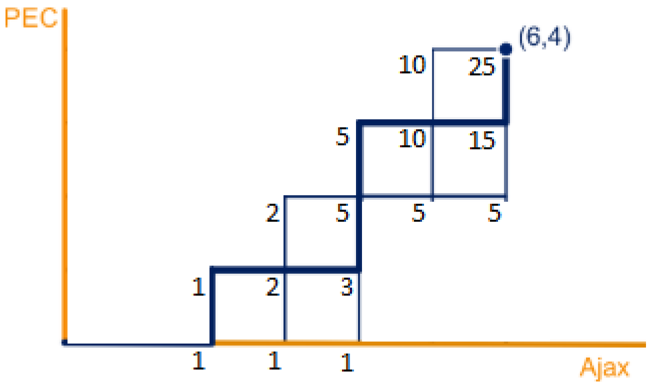


c) Uit de figuur bij onderdeel a kunnen we zien dat er 15 verschillende routes naar punt (4,2) mogelijk zijn. In de tweede helft is de uitslag 2-2. We kunnen nu opnieuw in de figuur bij onderdeel a zien dat daarnaartoe 6 routes zijn. In totaal geeft dat dus $15 \cdot 6 = 90$ verschillende scoreverlopen.

d) Als Ajax de hele wedstrijd voor heeft gestaan, dan zijn tussen standen als 0-1, 1-1, 0-2, etc. niet mogelijk. Dat zijn de punten in de linkerbovenhoek van het rooster. De ruststand was (4,2), dus ook enkele tussenstanden links onder waren niet mogelijk. Als we de niet toegelaten tussenstanden weglaten, dan vinden we het volgende rooster:



Nu vullen we 1-en in langs de onderste as. We tellen opnieuw bij ieder roosterpunt de getallen links en onder bij elkaar op. En als er links of onder niks staat, kiezen we daarvoor een 0. Uitrekenen en invullen geeft dan de volgende oplossing.



In totaal zijn er dus 25 verschillende routes, met een tussenstand van 4-2 en de voorwaarde dat Ajax steeds voor heeft gestaan.

<u>Opgave 41</u>

Om de tiende regel te maken, begin je met een 1, en dan tel je steeds de twee opeenvolgende getallen uit regel 9 bij elkaar op. En je sluit af met een 1. Dat geeft:
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

<u>Opgave 42</u>

a) Begin weer met een 1, en tel dan de twee opeenvolgende getallen uit de regel erboven bij elkaar op en eindig met een 1. Dat geeft voor regels 5 en 6:
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

b) Als je de getallen op regel 10 bij elkaar optelt, dan vindt je:
1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024.
Dit is een macht van 2: $2^{10} = 1024$.
Als je naar de andere regels kijkt:
Regel 1: 1 + 1 = 2, en ook: $2^1 = 2$
Regel 2: 1 + 2 + 1 = 4, en ook: $2^2 = 4$

Regel 3: 1 + 3 + 3 + 1 = 8, en ook: $2^3 = 8$
Regel 4: 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16, en ook: $2^4 = 16$
Op regel *x* lijkt dus te gelden dat de som van de getallen gelijk is aan 2^x.

c) De som van iedere regel stelt het aantal manier voor dat er is om routes te maken met *x* stappen. In iedere stap heb je twee mogelijkheden, dus je komt uit op 2^x mogelijkheden voor routes met *x* stappen.

Opgave 43

a) Je moet 5 + 2 is 7 stappen maken, dus je vindt het aantal kortste routes naar (5, 2) in regel 7 in de driehoek van Pascal. Je moet 2 stappen naar rechtsonder maken, dus je moet het derde getal opzoeken (het eerste getal staat voor 0 stappen naar rechtsonder, het tweede voor 1 stap en dus het derde voor 2 stappen naar rechtsonder). Dat is 21.
b) Kijk nu in rij 10 en zoek daar het vijfde getal op. Dat is 210.

Opgave 44

a) Uit beide komt 38760.
b) We kijken nu weer even naar de rechthoekige schema's, met (0, 0) linksonder.
Er zijn in totaal 20 stappen gemaakt, waaronder 7 naar rechts, of 7 naar boven. Er blijven dan nog 13 stappen over voor de andere richting. Dit geef de mogelijke coördinaten (13, 7) en (7, 13).
c) Er zijn 18 stappen te gaan, met 10 of 8 in de ene richting en dan 8 of 10 in de andere richting. Dat geeft de volgende combinatiegetallen:
$$\binom{18}{8} \text{ of } \binom{18}{10}$$
d) Er moet gelden *n* + 7 = 16, dus *n* = 9.
e) Van (2, 3) naar (8, 6) moet je 6 naar rechts en 3 omhoog. In totaal 9 stappen. De combinatiegetallen zijn:
$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

Paragraaf 1.6 Combinaties

Opgave 46

Kijk voor de uitwerking van deze opgave naar de antwoorden in het digitale boek.

Opgave 47

a) Er moet 20 keer een leerling wel of niet worden gekozen. Een route bestaat dus uit 20 stappen. Als je een leerling kiest die helper wordt, dan ga je naar boven in het rooster, anders naar rechts. Als je 3 keer naar boven kunt, dan kun je nog 17 keer naar rechts, dus je komt uit in het punt (17, 3).
b) Het aantal keuzes van 3 uit 20 is:
$$\binom{20}{3} = 1140$$

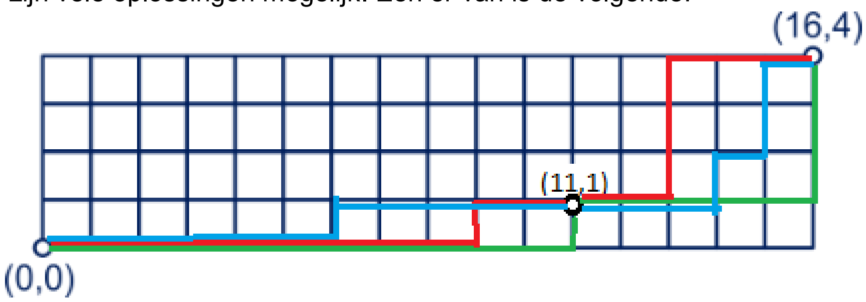
Opgave 48

a) Nu moet er 20 keer worden gekozen en 4 keer moet de keuze voor een helper zijn. Dat is dus 4 keer positief, en 16 keer negatief. De coördinaten van het punt *B* zijn (16, 4).

b) Het aantal keuzes van 4 uit 20 is:

$$\binom{20}{4}=4845$$

c) Er zijn vele oplossingen mogelijk. Eén er van is de volgende:



d) Bij 1 jongen uit 12 en 3 meisjes uit 8 horen de combinatie getallen:

$$\binom{12}{1} \text{ en } \binom{8}{3}$$

Uitrekenen en vermenigvuldigen geeft:

$$\binom{12}{1}\cdot\binom{8}{3}=12\cdot 56=672$$

e) Nu moeten er 3 jongens uit 12 worden gekozen, 9 niet en 3 wel. Daar hoort het punt (9, 3) bij. En er moeten 1 meisje uit 8 worden gekozen, 7 niet en 1 wel. Daar hoort het punt (7, 1) bij. Daarmee berekenen we:

$$\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{1}=220\cdot 8=1760$$

f) Nu moeten er 2 jongens uit 12 worden gekozen en 2 meisjes uit 8 worden gekozen. Daarmee berekenen we:

$$\binom{12}{2}\cdot\binom{8}{2}=66\cdot 28=1848$$

g) Nu moeten er 4 jongens uit 12 worden gekozen en 0 meisjes uit 8 worden gekozen. 0 meiskes kiezen kan op 1 manier, dus er volgt:

$$\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{0}=495\cdot 1=495$$

h) Soortgelijk volgt:

$$\binom{12}{0}\cdot\binom{8}{4}=1\cdot 70=70$$

i) We berekenen: 672 + 1760 + 1848 + 495 +70 = 4845. De totalen kloppen.

<u>Opgave 49</u>

Als er op de eerste rij twee witten schijven staan, dan moeten we 2 uit 3 posities kiezen. Dan blijven er nog 3 schijven over voor de andere twee rijen, dus daar moeten we 3 uit 6 posities kiezen. Samen geeft dat:

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{6}{3}=3\cdot 20=60$$

Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 3

Opgave 50

a) We moeten 5 posities uit 12 kiezen, waarop de zieke bomen staan.

$$\binom{12}{5} = 792$$

b) Nu hebben we nog 9 posities voor de 5 zieke bomen.

$$\binom{9}{5} = 126$$

NB: We hadden ook de 4 posities kunnen kiezen voor de gezonde bomen. Dan zouden we berekenen:

$$\binom{9}{4} = 126$$

Opgave 51

a) Zij moet 3 uit 7 vakken kiezen. Dat kan op het volgende aantal manieren:

$$\binom{7}{3} = 35$$

b) Als ze geen van de exacte vakken kiest, dan blijven er 4 vakken over om uit te kiezen. Zij moet dan dus 3 uit 4 vakken kiezen. Dat kan op het volgende aantal manieren:

$$\binom{4}{3} = 4$$

Eén exact vak kiezen kan op 3 manieren. En dan nog 2 vakken kiezen uit de 4 vakken kan op 4 boven 2 manier. In totaal dus:

$$3 \cdot \binom{4}{2} = 3 \cdot 6 = 18$$

c) Hoogstens één exact vak, betekent 0 of 1 exact vak. Dus we moeten de resultaten uit b bij elkaar optellen: 4 + 18 = 22.

Opgave 53

a) Het aantal mogelijke viertallen uit de tien clubs is het aantal combinaties van 4 uit 10, ofwel:

$$\binom{10}{4} = 210$$

b) Met die vier clubs zijn 4 · 3 · 2 · 1 = 4! = 24 uitslagen mogelijk.

c) Bij iedere combinatie zijn er 4! Uitslagen, dus het totaal aantal mogelijke uitslagen is:

$$\binom{10}{4} \cdot 4! = 210 \cdot 24 = 5040$$

d) Eén van de 10 clubs kan op de eerste plaats komen. Daarna zijn er nog 9 voor de tweede plaats, 8 voor de derde en 7 voor de vierde plaats. Dat geeft het volgende aantal mogelijke uitslagen:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Opgave 54

Daar komt 210 uit, en dat komt precies overeen.

Opgave 55

a) Het aantal permutaties van 4 uit 10 is 10 · 9 · 8 · 7. Dat vullen we in bij:

$$\binom{10}{4} = \frac{\text{aantal permutaties van 4 uit 10}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Dan volgt:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Nu vermenigvuldigen we teller en noemer met 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1. Dat mag, want als je teller en noemer met hetzelfde vermenigvuldigt, dan verandert de waarde niet. Er komt dan dus:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Omdat geldt:

10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 10!

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 6!

en

4 · 3 · 2 · 1 = 4!

kunnen we de laatste breuk nu herschrijven tot:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$

b) Voor 12 boven 3 berekenen we:

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$$