Wiskunde D Online – uitwerking oefenopgaven 4 VWO blok 1 les 4

Paragraaf 1.7 Herhalingscombinaties

Opgave 56

a) Anne moet 3 uit 7 kiezen, dat kan op $\binom{7}{3} = 35$ manieren.
b) Hij kiest geen pistache, dus kan nog kiezen uit 6. Hij kiest wel hazelnoot, dus voor de laatste twee bolletjes moet hij nog 2 kiezen uit 5, dan kan op $\binom{5}{2} = 10$ manieren.
c) Zie de plaatjes in het digitale boek.
d) Nu moet je in het rooster 9 stappen maken: 6 naar rechts en 3 omhoog. Dat kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
e) Zet de hazelnoot vooraan en de pistache achteraan. Dan moet je van (0, 1), want dan heb je minstens 1 hazelnoot gekozen, naar (5, 3) want dan kun je geen pistache meer kiezen. Van (1, 0) naar (5, 3) is hetzelfde als van (0, 0) naar (5, 2) en dat kan $\binom{7}{2} = 21$ manieren.

Opgave 58

a) Vijf verschillende munten, dus 5 verticale lijnen. Iedere munt kan 0, 1, 2, 3 of 4 keer voorkomen, dus ook 5 horizontale lijnen in het rooster. In dit rooster moet je 8 stappen maken, 4 naar rechts, 4 omhoog. Dat kan op $\binom{8}{4} = 70$ manieren.
b) De eerste twee stappen gaan naar rechts, naar (2, 0). Daarna van (2, 0) naar (4, 4). Dat is hetzelfde als van (0, 0) naar (2, 4) en dat kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.
c) Zet de munten van 10 cent voorop, dan moet je van (0, 2) naar (4, 4), ofwel van (0, 0) naar (4, 2) en dat kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.
d) Zet weer de munten van 10 cent voorop, maar vertrek nu van (1, 2), dan heb je precies 2 munten van 10 cent. Van (1, 2) naar (4, 4) is hetzelfde als van (0, 0) naar (3, 2) en dat kan op $\binom{5}{2} = 10$ manieren.
e) Dan heb je combinaties zonder herhaling. Als je zonder herhaling 4 uit 5 munten moet kiezen, dan kan dat op $\binom{5}{4} = 5$ manieren.

Paragraaf 1.8 Herhalingscombinaties

Opgave 60, 61, 62

Zie de uitwerkingen in het digitale boek.

Opgave 63

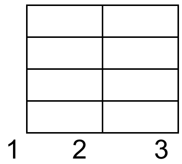
a) In de vaas doen we een 0, een 1 en een 2. We gaan trekken met terugleggen, ofwel een geordende greep met herhaling. Dat kan op $3^8 = 6561$ manieren.
b) Dan hebben we rijtjes met alleen maar enen en tweeën. Hier doen we 1 en 2 in de vaas en bepalen weer het aantal geordende grepen: $2^8 = 256$.
c) tot en met g): zie de uitwerkingen in het boek.

Opgave 64, 65, 66

Zie de uitwerkingen in het digitale boek.

Opgave 67

a) Je trekt 4 keer en iedere keer heb je keuze uit 3. De volgorde is van belang, dus zijn er $3^4 = 81$ verschillende grepen.
b) Maak een rooster met 3 verticalen lijnen (voor de getallen 1, 2 en 3), waarin je 4 stappen omhoog kunt doen (dus vijf horizontale lijnen):



Iedere route van linksonder naar rechtsboven is een andere ongeordende greep. Iedere route bevat 6 stappen, waarvan 4 naar boven. Daarvan zijn er $\binom{6}{4} = 15$.

c) Kiers eerst de posities waar de enen moeten komen. Dat kan op $\binom{4}{2}$ manieren. Daarna zijn er nog twee posities voor de 2: $\binom{2}{1}$ manieren. De 3 komt op de overgebleven plaats. In totaal dus $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 12$ geordende grepen bij de ongeordende greep 1, 1, 2, 3.
d) Zie de uitwerking in het boek.

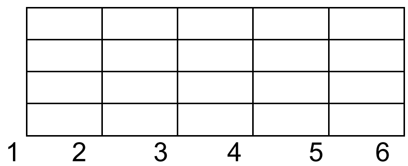
Paragraaf 1.9 Herhalingscombinaties

Opgave 68

a) Als de 1 bovenaan staat en je gaat rechtsom, dan kun je de cijfers 2 tot en met 7 er op $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ volgordes achter zetten.
b) Ga er weer vanuit dat de 1 boven staat. Voor de 2 hebben we dan 6 plaatsen, voor de 3 nog 5 plaatsen, enzovoorts. In totaal: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ mogelijkheden.
c) Als de 1 boven staat, hebben we voor de 2 nog 6 plaatsen, etc. We eindigen met de 5, waarvoor nog 3 plaatsen open zijn. Dat zijn dus $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ mogelijkheden.

Opgave 70

a) We hebben hier te maken met een ongeordende greep met herhaling. Daar hoort een rooster bij met 6 verticale lijnen (voor de aantallen ogen 1 tot en met 6) en vier stappen omhoog (omdat we vier dobbelstenen gooien).



Van linksonder naar rechtsboven zijn 9 stappen, waarvan 4 omhoog. Dat kan op $\binom{9}{4} = 126$ manieren.

b) Ongeordende grepen met som 8 zijn:
1, 1, 1, 5 (hierbij horen 4 geordende grepen)
1, 1, 2, 4 (hierbij horen 12 geordende grepen)
1, 1, 3, 3 (hierbij horen 6 geordende grepen)
1, 2, 2, 3 (hierbij horen 12 geordende grepen)

2, 2, 2, 2 (hierbij hoort 1 geordende greep)
Er zijn 35 geordende grepen met som 8. In totaal zijn er 64 = 1296 geordende grepen. De kans op een greep met som 8 is dus 35/1296.

Opgave 71

a) Twee drankjes kiezen uit 6 kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.
Drie drankjes kiezen uit 6 kan op $\binom{6}{3} = 20$ manieren.
Vier drankjes kiezen uit 6 kan op $\binom{6}{4} = 15$ manieren.
Vijf drankjes kiezen uit 6 kan op $\binom{6}{5} = 6$ manieren.
Zes drankjes kiezen uit 6 kan op één manier, je kiest ze immers alle 6.
b) Tel de aantallen in onderdeel a) op, dan vind je 57 mogelijke cocktails.

Opgave 72

a) Je kunt op $\binom{6}{2} = 15$ manieren twee cijfers kiezen en in een groep van 2 stoppen. De rest komt in de andere groep.
Je kunt op $\binom{6}{1} = 6$ manieren één cijfers kiezen en in een groep van 1 stoppen.
b) Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren drie cijfers kiezen en in een groep van 3 stoppen. Maar als je die groep A noemt, en de rest groep B, dan krijg je dezelfde splitsing als wanneer je de 3 cijfers in groep B stopt. Met 20 heb je dus alle splitsingen dubbel geteld, zodat je voor het goede antwoord nog door 1 moet delen. Er zijn dus 10 manieren om 6 cijfers in twee groepen van drie te splitsen.
c) Alle mogelijke splitsingen zijn:
groep van 1 en groep van 5: 6 manieren
groep van 2 en groep van 4: 15 manieren
groep van 3 en groep van 3: 10 manieren.
In totaal: 31 manieren.

Opgave 74

a) De volgorde is van belang en herhaling toegestaan: 3^7 = 2187 mogelijkheden.
b) Blauw, geel en rood kunnen in de volgende aantallen voorkomen:
1, 1, 5 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · 6 = 42)
1, 2, 4 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)
1, 3, 3 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{3}$ = 140)
1, 4, 2 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)
1, 5, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · 6 = 42)
2, 1, 4 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)
2, 2, 3 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2}$ = 210)
2, 3, 2 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2}$ = 210)
2, 4, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)
3, 1, 3 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{3}$ = 140)

3, 2, 2 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2}$ = 210)

3, 3, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{3}$ = 140)

4, 1, 2 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)

4, 2, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · $\binom{6}{2}$ = 105)

5, 1, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7 · 6 = 42)

In totaal zijn dit 1806 mogelijkheden.

c) We kunnen op $\binom{3}{2}$ = 3 manieren twee kleuren kiezen.

De eerste en tweede kleur kunnen nu in de volgende aantallen voor komen:

1, 6 (het aantal mogelijke volgordes is 7)

2, 5 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{2}$ = 21)

3, 4 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{3}$ = 35)

4, 3 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{4}$ = 35)

5, 2 (het aantal mogelijke volgordes is $\binom{7}{5}$ = 21)

6, 1 (het aantal mogelijke volgordes is 7)

In totaal zijn dit 3 · 126 = 378 mogelijkheden.

d) Daar zijn er drie van: alles blauw, of alles geel, of alles rood: 3.

e) Er geldt: 2187 = 1806 + 378 + 3.

Opgave 76

a) Vanuit iedere stip kun je 7 lijntjes trekken. In totaal dus 8 · 7 = 56 lijntjes. Maar dan heb je ieder lijntje dubbel getekend. Dus deel 56 door 2, dat geeft: 56 / 2 = 28 lijntjes.

Een andere redenatie is dat je 2 stippen uit 8 moet kiezen. Dat kan op $\binom{8}{2}$ = 28 manieren.

Tussen de twee gekozen stippen trek je het lijntje, en zo kom je op 28 mogelijke verbindingslijnstukken.

b) Voor iedere verbindingsdriehoek moet je 3 punten kiezen uit 8. Daar zijn $\binom{8}{3}$ = 56 mogelijkheden voor. En dus zijn er 56 verbindingsdriehoeken.